Literatura (viz odkazy na webu k AN3E/FVP): [IC2], [Z], čísla v kulatých závorkách označují stránky.

**Co byste u ústní zkoušky měli především umět.**

- Vysvětlit pojmy *vnitřní, vnější, izolovaný, hromadný, hraniční bod* na „jednoduchých" množinách (například $[0,1)\times(0,2]$, $[0,1]\times\{1\}$, $\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$, $\{(n-1)/(n+1) : n\in\mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n(n-1)/(n+1) : n\in\mathbb{N}\}$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \le 1\}$).
- Vysvětlit definice všech možných derivací, jejich geometrické významy a vztahy mezi nimi.
- Vědět, jakou polohu má tečná rovina ve stacionárním bodě (to je ten, ve kterém jsou nulové všechny parciální derivace). Vysvětlit, jaký průběh má funkce ve stacionárním bodě, v němž je kvadratická forma daná druhými derivacemi indefinitní – proč takovému bodu říkáme sedlový bod?
- Hlavní myšlenku důkazu věty 2.108 [Z](99): jak to vypadá, když místo funkce vyšetřujeme jen její Taylorův polynom (ignorujeme jeho zbytek a lemma 2.107), tedy souvislost extrému Taylorova polynomu druhého stupně s vlastností kvadratické formy vytvořené z druhých derivací funkce.
- Povídání o tom, jak počítat vázané extrémy: příklad 2.166 [Z](139).
- Předvést, jak vysvětlíte žákům ZŠ počítání obsahu obrazce. Ukázat, že pro množinu $M = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(\mathbb{Q}\cap[0,1])$ toto počítání selže ($M$ má podle něj obsah kdesi mezi nulou a jedna). Jak definici obsahu vylepšíte?

## Metrické a normované prostory

Viz text Metrické a normované prostory

## Limity, spojitost

Poznámka 14.2(89)[IC], der $N$ zde označuje množinu hromadných bodů množiny $N$.

Příklady na existenci limit budou pouze jednoduché:

- buď ukážeme různost limit po přímkách: v 14.2(89)[IC] zvolíme za $N$ přímku a za $M$ celý prostor,
- nebo větu o sevřené funkci (z AN1E, říkali jsme jí též policejní věta), příklad 14.1(88)[IC], nebo třeba $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, kde si uvědomíme, že pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, a tedy $-|x| \leq f(x, y) \leq |x|$.

U ústní zkoušky budu chtít, abyste uměli vysvětlit i náročnější příklad, jako např. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. V počátku jsou limity po všech přímkách nulové, ale po parabole $y^2 = x$ je rovna polovině, a proto funkce $f$ v počátku nemá limitu.

Cvičení 14.02[IC] – věty o limitách a aritmetických operacích (analogické větám pro funkci jedné proměnné).

*Příklady do písemky:* viz cvičení 14.16, 17, 19, 21, 25(91)[IC].

## Derivace

Probírali jsme 5 druhů derivací: derivaci podle vektoru, parciální derivaci, slabou derivaci, silnou derivaci, gradient. Nejdříve uvedu, kde najdete jejich definice, následně uvedu geometrický význam a na závěr vztahy mezi derivacemi, které byste měli znát.

Derivace podle vektoru: v [IC] definice je na straně 92 nahoře a je nazývána směrovou derivací, v [Z] 2.24. Podle mého názoru je název směrová derivace přiléhavější pro derivaci podle jednotkového vektoru. U ústní zkoušky byste měli umět vysvětlit rozdíl (návod: podle poznámky 14.5(92) je derivace podle vektoru homogenní).

Parciální derivace: speciální případ derivace podle vektoru, [IC] definice na straně 92 dole, poznámka 14.6(93); [Z] 2.1.

Slabá derivace: v [IC] ani v [Z] není zmiňována. Slabá derivace funkce $f$ v bodě $A$ je zobrazení, které vektoru $v$ přiřadí derivaci funkce $f$ v bodě $A$ podle vektoru $v$, pokud je toto zobrazení lineární (pokud není lineární, tak funkce $f$ v bodě $A$ slabou derivaci nemá).

Silná derivace: v [IC] je nazývána diferenciálem funkce, definice na straně 94 nahoře; [Z] 2.5, 2.6, 2.7.

Gradient je definován v [IC] na straně 98 nahoře, v [Z] 2.26, 2.27. Není shoda na podmínkách existence. V [IC], [Z] je pro existenci gradientu požadována diferencovatelnost, tedy existence silné derivace. Kolega Veselý požadoval pro existenci gradientu pouze existenci parciálních derivací.

Geometrický význam:

- Existence derivace podle vektoru odpovídá existenci tečny.
- Existence slabé derivace odpovídá situaci, kdy tečny tvoří rovinu.
- Existence silné derivace odpovídá existenci tečné roviny.

Příklady:
Příklad 14.3(92)[IC] popisuje funkci, tečny jejíhož grafu netvoří rovinu. Tato funkce má derivace ve všech směrech, ale nemá slabou derivaci.
Příklad 14.27(97)[IC]: Tečny ke grafům všech popsaných funkcí tvoří rovinu, ale není to tečná rovina – funkce mají slabou derivaci, ale nemají silnou derivaci.

Vztahy mezi derivacemi:

- Z existence slabé derivace plyne existence derivací ve směru (přímý důsledek definice slabé derivace).
- Z existence derivací ve směru neplyne existence slabé derivace. Viz funkce v příkladu 14.3(92)[IC], která má derivaci ve směru, ale ta není aditivní (geometricky to znamená, že graf funkce má tečny, ale ty netvoří tečnou rovinu).
- Z existence silné derivace plyne existence parciálních derivací [Z] 2.10 i s důkazem.
- Věta 14.3(95)[IC]: z existence silné derivace plyne existence slabé derivace a derivací podle vektoru.
- Věta 14.4(95)[IC] o existenci silné derivace i s důkazem pro funkci dvou proměnných. Důkaz viz [Z], 2.19, 2.20. Hlavní myšlenka důkazu: Nakreslete do roviny body $(x, y)$, $(x + h_1, y + h_2)$ a pomocný bod $(x + h_1, y)$. Rozdíl $f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y)$ vyjádříme jako součet rozdílů $f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y)$ a $f(x + h_1, y) - f(x, y)$ a na oba rozdíly použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (viz AN1E). Takto vyjádřený rozdíl dosadíme do definice silné derivace a použijeme spojitost parciálních derivací v bodě $(x, y)$.

Gradient a směr největšího a nulového nárůstu a poklesu funkční hodnoty: cvičení 14.28(98)[IC].

Věta [Z] 2.14 o spojitosti diferencovatelné funkce i s důkazem.

[Z] 2.16: definice tečné roviny.

Výše uvedené se týká zobrazení $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$. V případě vícerozměrných obrazů počítáme derivaci po složkách, viz [Z] 2.35 – 2.38.

*Příklady do písemky:* viz Cvičení z funkcí více proměnných na webu předmětu AN3E.

## Extrémy funkcí více proměnných

[IC](181): definice a terminologie, věta 17.1. o nutné podmínce pro extrém a její důsledek, definice stacionárního bodu.

[IC](37): věta 12.7 (pozor, omylem tam jsou s tímto číslem věty dvě, vemte tu dolní). Definici kompaktní množiny vyžadovat nebudu, větu si přeformulujte pro $X = \mathbb{R}^d$ a použijte fakt, že v $\mathbb{R}^d$ jsou kompaktní množiny právě množiny uzavřené a omezené.

Záměnnost parciálních derivací: příklad 2.78 [Z](81) nebo příklad 14.8 [IC](103). Tvrzení 2.81 [Z](83) (bez důkazu, pozor na formulaci z přednášky, zapomněla jsem na předpoklad (ii), bez něj věta neplatí).

[Z](97): definice 2.102 lokálního extrému, definice 2.103 relativního lokálního extrému (my jsme mu říkali vázaný extrém), poznámka 2.104, věta 2.105 i s důkazem, poznámka 2.106 a nad ní připomenutí kvadratických forem, lemma 2.107 i s důkazem, věta 2.108 i s důkazem

Vázané extrémy: [Z](139) příklad 2.166, věta 2.167(140) o Lagrangeových multiplikátorech.

*Příklady do písemky:*

1. Pro funkci $f : (x, y) \mapsto 2x + 3y - x^2y^3$
   (a) Nalezněte lokální extrémy a určete jejich typ.
   (b) Nalezněte maximum a minimum na množině $M = [0, 2] \times [0, 1]$ (tj. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y \in [0, 1]\}$).
2. Nalezněte lokální extrémy funkce
$$f : (x, y) \mapsto 2^{5x^2-6xy+2y^2+2x-2y}$$
   a určete jejich typ.
3. Pro funkci $f : (x, y) \mapsto 2^{x^2+2y^2-6x+4y}$
   (a) Nalezněte lokální extrémy a určete jejich typ.

(b) Nalezněte maximum a minimum na množině $M = [0,7] \times [0,2]$.

4. Metodou Lagrangeových multiplikátorů nalezněte maximum a minimum funkce $F$ na množině $M$ a výsledek zkontrolujte grafickým řešením.

$$f : (x,y) \mapsto x - 2y, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + 2y^2 = 4\}.$$

Návod na snadnější počítání: co víte o monotonii exponenciální funkce? Jak ji můžete využít? Jaký je geometrický význam exponentu ve třetím příkladě?

## Měření obsahu a objemu a integrály funkcí více proměnných

Jak lze měřit obsahy a objemy? Výklad pomocí milimetrového papíru pro děti 4. třídy ZŠ. Množina $M = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ nemá podle této definice obsah (všechny obdélníčky ve čtverci $[0,1] \times [0,1]$ množinu $M$ protínají, ale žádný není podmnožinou $M$; horní odhad obsahu je tedy 1 a dolní 0).

Požadavky, které klademe na obsah a objem. Co je $\sigma$-aditivita [IC](248) a proč ji požadujeme.

Vnější míra: my jsme definovali vnější míru množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ ($M \subset \mathbb{R}^3$) jako

$$\text{infimum}\,\{\text{součet obsahů obdélníků (objemů kvádrů) : soubor obdélníků}$$

$$\text{(kvádrů), jejichž sjednocení je nadmnožinou množiny } M\}\,.$$

V [IC] je to trochu jinak (ale výsledek je stejný), viz vztahy (6)(245), (7)(247).
Množina $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ má vnější míru 0 (i s důkazem).
Vnější míra není aditivní (bez důkazu, jen jako fakt). (Mimochodem, to je důvod, proč jste v KAP/PSE zavedli $\sigma$-algebru.)

Fubiniova věta: 19.24 [IC](269), příklad 19.6(270).

Věta o substituci: 19.26 [IC](272). Speciálně pro polární, válcové a sférické souřednice.

*Příklady do písemky:*

1. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \le 1, z \in [0, 1 - x^2]\}.$$

2. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z \in [0, 2^{-x^2-y^2}]\}.$$

3. Vypočtěte objem tělesa

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, z \in [0, 4 - x^2 - y^2]\}.$$

4. Pro kužel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 1]\}$$

vypočtěte pomocí integrálu $S = \int_K z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a objemu kužele $V$ polohu těžiště $T = [0, 0, S/V]$.