Literatura: [JV-M1], [JV-M2] (viz odkazy na stránkách k AN3E/FVP)

Motivace

Pojmy spojitost a limita můžeme budovat na struktuře, na které máme zavedeno (definiváno) okolí bodu:
$x \in \mathbb{R}^d$: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d :$ vzdálenost x od y je menší než $\varepsilon\}$

Proto definujeme *metrický prostor* jako dvojici (P, ϱ), kde P je neprázdná množina a ϱ je zobrazení $P \times P$ do $\mathbb{R}$ (metrika, vzdálenost) splňující jisté axiomy (přirozené požadavky na vzdálenost).

Budeme se zabývat funkcemi z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$, což jsou vektorové prostory (s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru číslem). Zde je přirozené definovat velikost vektoru jako funkci $\|\cdot\| : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ a od ní odvodit vzdálenost $\varrho(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$.

Dvojici (strukturu) $(V, \|\cdot\|)$, kde zobrazení $\|\cdot\|$ splňuje jisté přirozené požadavky na velikost vektoru (normu), budeme nazývat *normovaným vektorovým prostorem.*

Program přednášek o metrických a normovaných prostorech

Takto vysázené části jsou povinné pouze pro KAP/FVP

Normované a metrické prtostory

12.1.1 definice metrického prostoru

12.1.2 poznámka (nosná množina, P versus (P, ϱ))

12.1.3 definice podprostoru

12.1.4 pojmy zavedené pro celý prostor indukují pojmy pro podmnožiny chápané jako podprostory

12.1.5 definice normovaného vektorového prostoru

12.1.7 metrika generovaná normou (je možné vždy)

12.1.8 za jakých podmínek lze od metriky odvodit normu

12.1.9 $x, y \mapsto |x - y|$ jako metrika a $x \mapsto |x|$ jako norma na $\mathbb{R}$

místo 12.1.13 metrický prostor na $\mathbb{R}^*$ z 12.3.8

za 12.2.1 normy na $\mathbb{R}^d$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ a od nich odvozené metriky

12.3.4 diskrétní metrika, diskrétní prostor

12.1.10–11 (kartézský) součin metrických prostorů a součin normovaných prostorů

kartézský součin $\mathbb{R}$ krát $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}^2$ s $\|\cdot\|_1$ normou

12.2.6–7 L_1 a L_∞ norma

12.2.8 Hölder, 12.2.9 Minkowski pro konečné posloupnosti

12.2.10 ℓ_p norma, $p \in [1, \infty]$ na prostorech konečné dimenze

12.2.11 „$p \to \infty$“

12.2.12 L_p

12.2.13 nekonečně-rozměrná ℓ_p

Okolí bodu, otevřené a uzavřené množiny

12.3.9 uzavřená a otevřená koule, sféra

12.3.10 koule v ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞ (rovinné i více-konečně-rozměrné)

12.2.2 ekvivalence norem

12.2.4, 12.2.5 ekvivalence norem na konečně rozměrných prostorech

12.3.11 definice otevřené množiny

12.3.13 definice uzavřené množiny (jako doplňku otevřené množiny)

12.3.14 otevřená koule je otevřená množina, totéž pro uzavřená..., v diskrétním prostoru jsou všechny množiny otevřené i uzavřené (nejen koule), *množina otevřená/uzavřená v množině*

12.3.15 okolí bodu – otevřená koule, otevřená množina bod obsahující

12.3.16 posloupnost konvergentní/divergentní v (P, ϱ)

12.3.17.1 jednoznačnost limity

12.3.17.2 poznámka o zobecňování z $\mathbb{R}$

12.3.18 konvergence v konečně-rozměrném normovaném vektorovém prostoru je konvergence po souřadnicích

12.3.19 tvrzení o otevřených množinách (axiomy topologického prostoru)

12.3.20 poznámka o metrických a topologických prostorech, ??která se dokazují zpravidla jen pro prostory metrické??

12.3.21 tvrzení o uzavřených množinách

12.3.23 definice vnitřního, hromadného, hraničního (je špatně, místo hromadným má být limitním), izolovaného, vnějšího, limitního bodu množiny

12.3.24 poznámka o vnitřním a vnějším bodě, o rozdílu mezi limitním a hromadným bodem

12.3.25 definice vnitřku/hranice množiny jako množiny všech vnitřních/hraničních bodů, definice uzávěru jako sjednocení vnitřku a hranice, *derivace množiny jako množina všech hromadných bodů*

12.3.28 vnitřek množiny je otevřená množina a je to vzhledem k inkluzi největší otevřená podmnožina, podobně uzávěr je uzavřená množina a je to nejmenší uzavřená nadmnožina, *množiny* G_δ, F_σ

12.3.29 vnitřek vnitřku, uzávěr uzávěru, doplněk vnitřku, doplněk uzávěru

12.3.26 pět tvrzení o vnitřcích, hranicích a uzávěrech (dá se na konci třetího nahradit inkluze rovností?)

12.3.27 množina je otevřená právě když je rovna svému vnitřku a je uzavřená právě když je rovna svému uzávěru

12.3.30 uzávěr je roven množině limitních bodů

12.3.31 množina je uzavřená právě když je rovna množině svých limitních bodů (toto někdy bývá definice uzavřené množiny)

12.3.32 o dvou metrikách na $\mathbb{R}$ *generujících stejné otevřené množiny, přitom jedna je omezená a druhá nikoliv – znamená to, že omezenost je metrický, ale není to topologický pojem*

12.3.33 hranice množiny je uzavřená množina, různá vyjádření hranice pomocí vnitřku a uzávěru

12.3.35 množina je uzavřená právě když obsahuje všechny svoje hromadné body

12.3.36 množina hromadných bodů je uzavřená

12.3.37 poznámka o vnitřku, hranici a vnějšku (celý prostor je jejich disjunktním sjednocením)

12.3.38–39 o tom, co jsou ekvivalentní metriky

12.3.41 o metrice na množině všech posloupností

12.3.42 o supremové (L_∞) *normě na množině omezených funkcí*

12.3.43 o L_∞ *a* L_1 *normách na* $\mathcal{C}[a,b]$

13.2.1 definice Cauchyovské posloupnosti

13.2.3 definice úplného prostoru

13.2.2.1–3 úplnost $\mathbb{R}$, neúplnost $\mathbb{Q}$

13.2.2.4 úplnost je metrická vlastnost a není to topologická vlastnost

13.2.5 ještě jednou úplnost $\mathbb{R}$ a úplnost $\mathbb{R}^d$

13.2.6 úplnost $\mathcal{C}[a,b]$ s L_∞ normou, souvislost se stejnoměrnou konvergencí, věta bez důkazu (*i s důkazem*)

kompaktní množinu $A \subseteq \mathbb{R}^d$ budeme definovat jako uzavřenou omezenou množinu, definice omezené množiny – viz 12.3.2 a poznámka 12.1.4

13.3.9 důležitá vlastnost kompaktních množin

13.2.15–20 operátor kontrakce, jeho pevný bod v úplném metrickém prostoru, příklad