

1. Ukažte, že zobrazení, které bodu  $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$  přiřadí číslo  $\|X\| := 2|x| + |y|/3$  splňuje axiomy normy. Načrtněte jednotkovou kružnici v této normě a graficky nalezněte konstanty  $C_1, C_2$  splňující  $(\|\cdot\|_2$  označuje euklidovskou normu)

$$(\forall X \in \mathbb{R}^2)(\|X\| \leq C_1\|X\|_2), \quad (\forall X \in \mathbb{R}^2)(\|X\| \geq C_2\|X\|_2).$$

Návod: označme  $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_2 = 1\}$  jednotkovou sféru (v našem případě vlastně kružnici) v euklidovské normě. Uvědomte si, že výrok vlevo je ekvivalentní s výrokem

$$(\forall X \in S)(\|X\| \leq C_1),$$

ten je ekvivalentní s

$$(\forall X \in \mathbb{R}^2)(X \in S \Rightarrow \|X\| \leq C_1)$$

a vzpomeňte si, jak souvisí implikace s inkluzí. Podobně naložte s výrokem vpravo.

2. Uveďte příklad bodu  $x \in \mathbb{R}^2$  a množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  splňujících (případně dokažte, že taková situace nemůže nastat)
- $x$  není prvkem  $M$  a  $x$  je hromadným bodem  $M$
  - $x$  je prvkem  $M$  a  $x$  není hromadným bodem  $M^c$
  - $x$  je hromadným bodem  $M$  a  $x$  není limitním bodem  $M$
  - $x$  není hromadným bodem  $M$  a  $x$  je limitním bodem  $M$
  - $x$  je hromadným bodem  $M$  a  $x$  není hraničním bodem  $M$
  - $x$  není hromadným bodem  $M$  a  $x$  je hraničním bodem  $M$
3. Pro bod  $X = [0, 0] \in \mathbb{R}^2$  a množiny  $M_i$

$$M_1 = B(0, 1), \quad M_2 = \mathbb{R}^2 \setminus M_1, \quad M_3 = \{X\}, \quad M_4 = \mathbb{R}^2 \setminus M_3$$

určete, zda je bod  $X$  vnitřním, hraničním, hromadným, limitním, izolovaným bodem množiny  $M_i$ .