

Cvičení z ODR, 3.3.2014

1. Řešte diferenciální rovnice. Uveďte všechna řešení a k nim příslušné intervaly nezávisle proměnné (maximální vzhledem k inkluzi). Úlohy řešte oběma metodami: pomocí integračního faktoru a variací konstant.

(a)

$$x^3 y' - xy = 1$$

(b)

$$xy' - y = x^3 e^x$$

(c)

$$xy' + (1+x)y = e^x$$

(d)

$$y' + \frac{x}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}$$

2. Zjistěte, zda jsou uvedené funkce lineárně závislé na uvedeném intervalu.

(a)

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad (-\infty, \infty)$$

(b)

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad f_3(x) = \log(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad (1, \infty)$$

(c)

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^3}, \quad (0, \infty)$$

(d)

$$f_1(x) = \log x, \quad f_2(x) = x \log x, \quad f_3(x) = x^2 \log x, \quad (0, \infty)$$

Návod: místo počítání Wronskiánu použijte základní větu algebry.

3. Nalezněte fundamentální systém diferenciálních rovnic.

(a)

$$y''' - y = 0$$

(b)

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

(c)

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

(d)

$$y^{(4)} - y = 0$$

(e)

$$y''' + y = 0$$

(f)

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

(g)

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

4. Metodou separace proměnných řešte rovnice. Ke každému řešení uveďte interval nezávisle proměnné (maximální vzhledem k inkluzi).

(a)

$$y' = y^2$$

(b)

$$y' = x^2 \sqrt{y}$$

(c)

$$y' = \frac{y^2 - y}{x}$$

(d)

$$y' = 2x \sqrt[3]{y}$$

(e)

$$y' = y^3 - y$$