Elementární funkce

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
13. ledna 2015

1. Seznam elementárních funkcí.

I. Elementární funkce jsou funkce, které vzniknou z níže uvedených funkcí aritmetickými operacemi a skládáním.

II. Funkce, k jejichž definici stačí reálná čísla a aritmetické operace.

(a) Mocniny s přirozeným exponentem ($x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$).

(b) Lineární funkce, graf, geometrický význam koeficientů.

(c) Polynomiální funkce, speciálně kvadratické funkce. Rozklad na součin kořenových činitelů.
Letní semestr: Základní věta algebry. Rozklad na součin kořenových činitelů a kvadratických výrazů.

(d) Letní semestr: Racionální funkce, ryze lomená racionální funkce, parciální zlomky, rozklad ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků.

III. Odmocniny jako inverzní funkce k mocninným funkcím, jejich definiční obor a obor hodnot a souvislost se spojitostí mocninné funkce ([JV], věty 4.3.34, 4.3.37) a vlastností suprema reálných čísel.

IV. Mocninné a exponenciální funkce s reálným exponentem.

(a) Vlastnost mocninných funkcí: $x^{m+n} = x^m x^n$, rozšíření této vlastnosti pro jiné než přirozené exponenty a definice mocninných funkcí s nulovým, záporným a racionálním exponentem, definiční obory těchto funkcí.
Dosaďte $m = 0$, $n = 1$ a odvoďte $x^0 = \ldots$. Dosaďte $m = -n$ a odvoďte $x^{-n} = \ldots$. Dosaďte $m = n = 1/2$ a odvoďte $x^{1/2} = \ldots$. Jak odvodíte $x^{1/3} = \ldots$?

(b) Exponenciální funkce – jak je definováno například $2^{\sqrt{2}}$?
Exponenciální funkce $x \mapsto a^x$ je definována jako spojité rozšíření z racionálních exponentů na reálné exponenty.
Axiomatická definice exponenciální funkce – je to funkce splňující

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \geq 1 + x$$

Pro korektnost této axiomatické definice je potřeba ukázat, že taková funkce existuje a že je určena jednoznačně (my se tím zde zabývat nebudeme).

(c) Logaritmická funkce jako inverzní funkce k exponenciální funkci, definiční obor a obor hodnot.

V. Goniometrické funkce

(a) Trigonometrická definice pro ostrý úhel.

(b) Definice pro ostatní úhly s použitím jednotkové kružnice. Zavedení polárních souřadnic v rovině.

(c) Součtové vzorce a jejich geometrické odvození.

(d) Axiomatická definice kosinu:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$$
$$\exists p > 0 : \cos(p) = 0 \ \wedge \ \cos \text{ je na } \langle 0, p \rangle \text{ klesající}$$

(e) Jakmile máme kosinus, je zavedení ostatních funkcí snadné:

$$\sin(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x),\ \operatorname{tg}(x) = \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - x).$$

VI. Cyklometrické funkce jako inverzní funkce k vhodně zúženým funkcím goniometrickým.

VII. Hyperbolické funkce:

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Platí pro ně mnoho vztahů podobných vztahům pro goniometrické funkce (odvoďte je):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$$

$$\sinh' = \cosh \quad \cosh' = \sinh$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad \sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

2. Základní limity. Ve všech případech $x \to 0$:

$$\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

3. Návod pro odvození základních limit.

1. Z goniometrické definice sinu odvodíme pro $x \in (0, \pi/2)$ nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

a odtud

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}.$$

Rozmyslete si, že pro $x \in (-\pi/2, 0)$ platí totéž – funkce sin je lichá a funkce cos sudá. Na uvedené nerovnosti aplikujeme policejní větu.

2. Použijeme $e^x \ge 1 + x$ a stejný vztah pro $-x$ dosazené za x: $e^{-x} \ge 1 - x$. Odtud pro $x > 0$ odvodíme

$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le e^x$$

a pro $x < 0$ odvodíme

$$e^x \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1$$

a opět použijeme policejní větu.

3. Poslední limitu dostaneme z $\frac{e^y-1}{y}$ substitucí $x = e^y - 1$. O substituci v limitě více v textu o limitě složené funkce.

4. Policejní věta je v [JV] jako čtvrtá část věty 4.3.12, my ji zde uvedeme samostatně. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$, funkce f, g, h jsou definovány v prstencovém okolí bodu x_0 a v tomto okolí platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Nechť mají funkce f, h v bodě x_0 limitu $\ell \in \mathbb{R}^\star$. Pak má i funkce g v bodě x_0 limitu rovnu ℓ.