

**Písemná část zkoušky z předmětů AN1E, KA1**  
**16. ledna 2015**

**Jméno a příjmení:**

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Určete definiční obory funkcí  $f$ ,  $g$  a zjistěte, zda je lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru.

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{\ln(2-x)} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2+4x}$$

2. Vypočtěte druhé derivace funkcí  $f$ ,  $g$  a určete definiční obory funkcí  $f$ ,  $f''$ ,  $g$ ,  $g''$ .

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2-1)^4}{x} \quad g : x \mapsto 2^{2x} 0.5^{x-2} 8^{x+1}$$

3. Pro interval  $I = (-1, 2)$  a funkci  $f$  určete obraz  $I_1 = f(I)$  a vzor  $I_2 = f^{-1}(I_1)$ .

$$f : x \mapsto \frac{4x}{x^2+1}$$

Návod: nejdříve si rozmyslete, co potřebujete k vyřešení úlohy o funkci  $f$  znát.

4. Vypočtěte limity funkcí  $f$ ,  $g$  v bodě  $-1$ .

$$f : x \mapsto \frac{x^3(x+\sqrt{x+2})^2}{x^2+2x+1}, \quad g : x \mapsto \frac{\sin(x^2-1)\sin(x^2+1)}{x^2+x} + \log_2(x+9)$$

5. Sestrojte Maclaurinův polynom funkce  $f$  vhodného stupně a použijte jej k výpočtu limity podílu  $f(x)/x^6$  pro  $x \rightarrow 0$ .

$$f : x \mapsto \sin(x^2) - x^2 e^{2x^2} + \sin(2x^4)$$

6. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce a použijte ji k určení maximálních intervalů, na nichž je funkce  $f$  rostoucí.

$$f : x \mapsto 2^{-x+1}(2x+1)$$

7. Formulujte větu o souvislosti hodnoty druhé derivace a konvexity funkce a použijte ji k určení maximálních intervalů, na nichž je funkce  $f$  konvexní.

$$f : x \mapsto 2^{-x+1}(2x + 1)$$

8. Napište definici pojmu inkluze (podmnožiny) a vysvětlete, jak jej lze použít k řešení rovnice

$$\sqrt{x} = x - 2.$$

9. Napište definici funkce rostoucí na intervalu a vysvětlete, jak tento pojem využijete k řešení nerovnice

$$\sqrt{x} \geq x - 2.$$

10. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce  $f$  má vlastní limitu v bodě  $+\infty$ .

$$f : x \mapsto 2^{-x}$$

11. Napište definici spojitosti funkce v bodě a ukažte, že funkce  $f$  je spojitá v bodě 8.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

12. Napište definici spojitosti funkce v bodě a ukažte, že funkce  $f$  není spojitá v bodě 2.

$$f : x \mapsto (x^3 - 2)\text{sign}(x - 2)$$

13. Napište znění Weierstrassovy věty.

14. Formulujte větu o kořeni spojitě funkce.

15. Formulujte a dokažte větu o Darbouxově vlastnosti spojitě funkce.

16. Formulujte a dokažte Rolleovu větu o střední hodnotě. K čemu jsme ji použili?

17. Formulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. K čemu jsme ji použili?

18. Formulujte Cauchyovu větu o střední hodnotě. K čemu jsme ji použili?

19. Formulujte věty o zbytku Taylorova polynomu.