Požadavky ke zkoušce z UKPE

7. ledna 2017

Ke všem otázkám se snažím uvést zdroje. Nejčastější zdroj je [JV]. K základním údajům o kruhové inverzi a Apolloniovým úlohám jsem použila wikipedii (přitom záruka věrohodnosti je v tomto případě toto moje konkrétní doporučení). Partie, které jsou v [JV] stručné a my jsme je na výuce rozpitvali podrobněji alespoň připomínám. Prosím o případnou zpětnou vazbu (samozřejmě před zkouškou, během zkoušky na vaše připomínky brát zřetel nebudu).

1. Úvod a opakování [U] (včetně úloh a domácího úkolu).

2. Kruhová inverze: definice, konstrukce obrazu a vzoru [IG], vysvětlete, že uvedená konstrukce vyhovuje uvedené definici (použijte podobné trojúhelníky a jejich vlastnosti). Vlastnost obrazu kružnic a přímek i s důkazem pomocí komplexních čísel ([JV], definice 4.3.11, poznámka 4.3.12 včetně převedení rovnice v (4.12) na rovnici v (4.12*), lemma 4.3.13, povídání za lemmatem 4.3.13 o obrazu přímek a kružnic). Apolloniovy úlohy, řešení některé z nich použitím kruhové inverze [AP].

3. Okolí bodu v $\mathbb{C}$ ([JV], označení 1.2.1 na str. 15) a v $\mathbb{S}$ ([JV], strana 16 dole), definice limity v $\mathbb{C}$ a $\mathbb{S}$ ([JV], 1.5. na straně 20 dole). Převedení výpočtu limity v nekonečnu na limitu v počátku ([JV], strana 23 nahoře). Stereografická projekce, odvození vztahů ([JV], poznámka 1.2.3 na stranách 17, 18) včetně výpočtu x_1, x_2, x_3.

4. Derivace funkce podle komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky ([JV], lemma 3.1.3 i s důkazem, poznámka 3.2.1, věta 3.2.2 bez důkazu). Funkce holomorfní na otevřené množině ([JV], definice 1.4.3) a v bodě ([JV], definice 3.3.3). Věta 4.2.8 o holomorfní funkci a zachování úhlu křivek, z důkazu jen hlavní myšlenka (pro nenulovou derivaci $f'(z_0)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ nahradíme v okolí bodu z_0 funkci f jejím lineárním Taylorovým polynomem, který úhel zachovává (to je potřeba ukázat,

potřebné znalosti naleznete v [U]), zbytek Taylorova polynomu nezmění úhel křivek, jen jejich zakřivení). Zobrazení pravoúhlé sítě rovnoběžek s reálnou a imaginární osou druhou mocninou ([JV], obrázek 4.2 na straně 68 a text (kousek) pod ním), odvození rovnic parabol (dělali jsme na výuce, z rovnic $\mathrm{Re}(x + \imath y)^2 = x^2 - y^2 =$ konstanta, $\mathrm{Im}(x + \imath y)^2 = 2xy =$ konstanta je třeba vyloučit buď x nebo y), zachování úhlu přímek protínajících se mimo počátek a nezachování úhlu reálné a imaginární osy.

5. Lineární funkce, složení ze tří funkcí, které představují posunutí, stejnolehlost a otočení ([JV], definice 4.2.5 a text za ní).
   Lineárně lomená funkce na $\mathbb{S}$ (definice 4.3.1). Množina lineárně lomených funkcí tvoří grupu (poznámka 4.3.14, důsledek 4.3.7). Složení lineárně lomené funkce ze dvou lineárních funkcí a inverze (poznámka 4.3.3). Invariantní body lineárně lomené funkce a jejich počet (definice 4.2.5 a text na str. 73 nahoře nad poznámkou 4.3.14). Dvojpoměr [JV], definice 4.3.21 a text na str. 75 nahoře. Lineárně lomená funkce zadaná třemi dvojicemi vzor, obraz: [JV] věta 4.3.15 o jednoznačnosti, lemma 4.3.16 o existenci pro speciální volbu obrazů, věta 4.3.17 o existenci pro obecný případ, vše i s důkazem. Lemma 4.3.24 i s důkazem (alternativní důkaz: dokažte zachování poměru bodů pro lineární funkci, dvojpoměru pro funkci $z \mapsto 1/z$ a použijte poznámku 4.3.3), důsledek 4.3.25 o dvojpoměru bodů na zobecněné kružnici a její geometrický význam (obvodové úhly na kružnici). Věty 4.3.15 a 4.3.17 o existenci a jednoznačnosti lineárně lomené funkce zadané třemi dvojicemi vzor, obraz i s důkazy. Důkaz existence jsme dělali odlišně (přímo pomocí dvojpoměru), důkaz jednoznačnosti jsme dělali stejně, jen jsme to podrobněji rozepsali.

6. Mocninné řady (opakování z bakalářského studia): definice 2.2.1, příklad 2.2.2 včetně odvození vzorce pro součet geometrické řady, lemma 2.2.3 i s důkazem, definice 2.2.4, příklady 2.2.6, úmluva 2.2.7, úmluva 2.2.10, vzorec (2.8) na straně 45 a jeho odvození z podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad. Poloměr konvergence mocninné řady, derivování řady člen po členu, lemma 2.3.4 (s důkazem ve speciálním případě existence limity ve vzorci (2.8)) a věta 2.3.5 o derivování mocninné řady člen po členu (pozor, pro obecnější řady nemusí platit, pravidlo o derivaci součtu obecně platí jen pro konečný počet sčítanců). Součet a obor konvergence nekonečné geometrické řady, příklad 2.3.9; vysvětlení, že geometrická řada je Taylorovou řadou svého součtu (poznámka 2.3.6 pro obecnější než geometrickou řadu, k důkazu použijeme

větu 2.3.5).

7. Exponencíální, goniometrické a hyperbolické funkce, jejich Taylorovy řady, Eulerův vztah ($\exp = \cos + \imath \sin$) a jeho odvození z Taylorových řad.
   Nejednoznačné funkce komplexní proměnné: odmocnina, logaritmus, argument, jejich lokální jednoznačnost.
   Nulové body mocninné řady (buď jsou všechna $z \in \mathbb{C}$ nulovými body, nebo jsou nulové body izolované) a odtud plynoucí rozšíření platnosti identit platných v reálném oboru (například $(\forall z \in \mathbb{R})(\exp(-z) - 1/\exp(z) = 0)$) na komplexní obor. Příklad 5.7.2, bod 1, 2, 4 (v [JV] pouívá větu 5.7.1 o jednoznačnosti, my jsme použili výše uvedenou vlastnost nulových bodů mocninné řady).

8. Funkce reálné proměnné, která má první derivaci, ale nemá druhou derivaci (například $x \mapsto x|x|$), funkce reálné proměnné, která má v bodě $x \in \mathbb{R}$ konvergentní Taylorovu řadu, ale není jí rovna v žádném okolí bodu x_0 (například $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ spojitě rozšířená do nuly).
   Věta 5.5.3, bod (3), (a_k jsou zde koeficienty Taylorovy řady, tj. $a_k = f^{(k)}(\zeta)$), bez důkazu.

Reference

[JV] Veselý, Jiří: Základy matematické analýzy.
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`

[U] MŠ: Complex numbers – revision.
`https://kap.fp.tul.cz/~simunkova/analyza_soubory/komplexni_cisla_uvod.pdf`

[IG] `https://en.wikipedia.org/wiki/Inversive_geometry`

[AP] `https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius`