Cauchy-Riemannovy podmínky
11. prosince 2018

Cílem tohoto textu je uvést podrobnosti k důkazu lemmatu 3.1.3 a věty 3.2.2 z [1] a uvést příklad.

Příklad. Funkci komplexní proměnné $f : z \mapsto z^2$ rozepíšeme pomocí dvou reálných funkcí reálné proměnné

$$f_1(x, y) + i f_2(x, y) = (x + iy)^2$$

a po úpravě

$$f_1(x, y) + i f_2(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Porovnání reálné a imaginární části pravé a levé strany dostaneme

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 - y^2 \\ f_2(x, y) &= 2xy \end{aligned}$$

Spočítáme parciální derivace

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x$$

Vidíme, že platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{1}$$

Vztahy (1) platí vždy, když má funkce f derivaci. Nazzýváme je *Cauchy-Riemannovými podmínkami*.

Značení. Symbolem D je v [1] značen gradient funkce a symboly D_1, D_2 složky gradientu, tedy parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv D_1 f \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv D_2 f \tag{2}$$

$$Df = (D_1 f, D_2 f)$$

Formulace lemmatu 3.1.3. Bod $z = x + iy \in \mathbb{C}$ je ztotožňován s bodem $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Význam symbolů $D_1 f_1$, $D_2 f_1$, $D_1 f_2$, $D_2 f_2$ jsme vyložili v (2).

Důkaz lemmatu 3.1.3 používá tvrzení: má-li funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ dvojnou limitu, pak má v tomto bodě limity o stejné hodnotě po přímkách, konkrétně po přímkách $x = x_0$ a $y = y_0$.

Silná derivace, nebo též totální diferenciál, je pojem základního kurzu matematické analýzy. Výklad tohoto pojmu najde čtenář v souboru `Derivace.pdf` umístěném v adresáři `http://kap.fp.tul.cz/ simunkova/analyza/an3-2018-19`.
Text navazuje na `Parcialni_derivace.pdf` ze stejného adresáře.

Základní vlastnosti silné derivace jsou zopakovány v [1] v poznámce 3.2.1.

Důkaz věty 3.2.2. Vztah (3.4) je Taylorův polynom funkce f prvního stupně se zbytkem R a derivací $f'(z) = C$. Symbol $o(h)$, $h \to 0$ vyjadřuje vlastnost zbytku $\lim_{h\to 0} R(h)/h = 0$.

$$f(z+h) - f(z) = Ch + R(h)$$

Ve vztahu (3.5) je dosazeno $C = a + ic$, $h = h_1 + ih_2$.

$$f(z+h) - f(z) = (a+ic)(h_1 + ih_2) + R(h)$$

Dále dosadíme i za funkci f a zbytek R reálnou a imaginární část $f = f_1 + if_2$, $R = R_1 + iR_2$

$$f_1(z+h) + if_2(z+h) - f_1(z) - if_2(z) = (a+ic)(h_1 + ih_2) + R_1(h) + iR_2(h)$$

a rovnost v komplexním oboru vyjádříme jako rovnost reálné a imaginární části (v reálném oboru)

$$\begin{aligned} f_1(z+h) - f_1(z) &= ah_1 - ch_2 + R_1(h) \\ f_2(z+h) - f_2(z) &= ch_1 + ah_2 + R_2(h) \end{aligned}$$

a porovnáme s definicí silné derivace funkcí f_1, f_2

$$\begin{aligned} f_1(z+h) - f_1(z) &= D_1 f_1 h_1 + D_2 f_1 h_2 + R_1(h) \\ f_2(z+h) - f_2(z) &= D_1 f_2 h_1 + D_2 f_2 h_2 + R_2(h) \end{aligned}$$

Odtud dostaneme existenci silných derivací funkcí f_1, f_2 i Cauchy-Riemannovy podmínky $D_1 f_1 = D_2 f_2$, $D_1 f_2 = -D_2 f_1$.

Opačnou implikaci – tedy, že z Cauchy-Riemannových podmínek a existence silných derivací funkcí f_1, f_2 plyne existence derivace $f'(z)$ dostaneme úpravami v opačném pořadí.

Reference

[1] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf`.