Dvojpoměr
24. října 2018

Cílem tohoto textu je definovat dvojpoměr čtveřice komplexních čísel a vyložit dvě jeho vlastnosti: ukázat, že dvojpoměr nabývá reálné hodnoty právě když body leží na společné zobecněné kružnici a dále ukázat, že zobrazení $z \mapsto 1/z$ zachovvává dvojpoměr. Jako důsledek uvedených vlastností pak dostaneme zobrazování zobecněných kružnic v kruhové inverzi na zobecněné kružnice.

Připomeneme, že *poměrem* trojice navzájem různých bodů z_1, z_2, z_3 nazýváme číslo

$$\mathrm{pomer}(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \tag{1}$$

Pomocí poměru bodů pak definujeme dvojpoměr jako poměr poměrů.

Definice dvojpoměru. *Dvojpoměrem navzájem různých bodů z_1, z_2, z_3, z_4 v komplexní rovině* budeme rozumět podíl

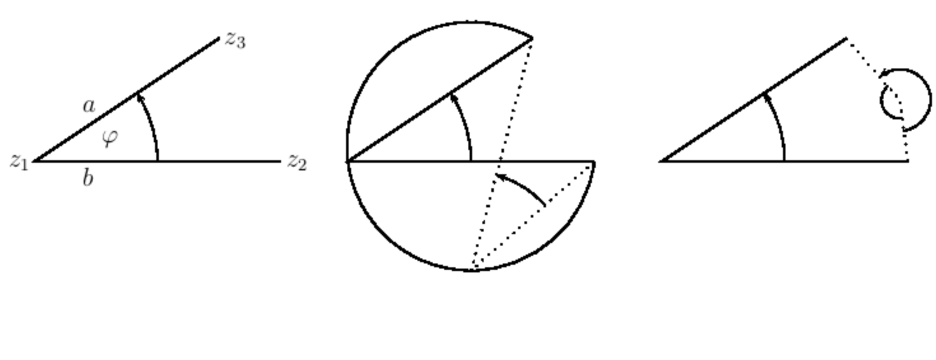
$$\mathrm{dvojpomer}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{pomer}(z_1, z_2, z_3) : \mathrm{pomer}(z_4, z_2, z_3) = \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)} \tag{2}$$

Zabývejme se otázkou polohy čtveřice bodů, pro které nabývá dvojpoměr reálné hodnoty. Zvolme trojici navzájem různých bodů z_1, z_2, z_3 a zkoumejme, pro jaká z_4 je $\mathrm{dvojpomer}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

1. Leží-li trojice bodů na společné přímce, pak je $\mathrm{pomer}(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$. Dvojpoměr v tom případě nabývá reálné hodnoty, právě když je $\mathrm{pomer}(z_4, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$, a to je právě když bod z_4 leží na přímce určené body z_2, z_3.

2. Na obrázku vlevo je trojice bodů z_1, z_2, z_3, které neleží na společné přímce – leží tedy na společné kružnici. Dále je na obrázku vyznačen úhel φ a velikosti úseček (vzdálenosti bodů) a, b. Pomocí nich vyjádříme

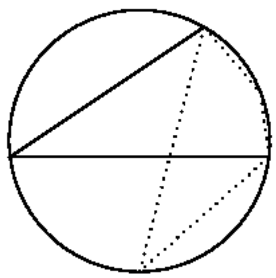
$$\mathrm{pomer}(z_1, z_2, z_3) = \frac{a}{b}(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$



Dvojpoměr je pak reálný právě když je argument poměru pomer(z_4, z_2, z_3) roven buď φ nebo $\pi + \varphi$.

Z věty o obvodových úhlech dostaneme, že první možnost nastane právě když bod z_4 leží na oblouku vyznačeném na prostředním obrázku.

Na obrázku vpravo je vyznačená druhá možnost, tedy $\arg(\text{pomer}(z_4, z_2, z_3)) = \pi + \varphi$. Úhel je orientovaný od ramene z_4z_2 k rameni z_4z_3. Jeho doplněk má velikost $\pi - \varphi$. Čtyřúhelník $z_1z_2z_4z_3$ má součet protilehlých úhlů roven π. To nastane právě u tětivového čtyřúhelníku.



Závěr:
zvolíme-li trojici bodů z_1, z_2, z_3 ležících na kružnici, pak je množina bodů z_4 takových, že dvojpomer(z_1, z_2, z_3, z_4) nabývá reálné hodnoty, rovna kružnici určené trojicí bodů z_1, z_2, z_3 bez těchto bodů (připomeňme, že jsme při definici dvojpoměru požadovali, aby body byly navzájem různé).

ZÁVĚR: Dvojpoměr čtyř navzájem různých bodů nabývá reálné hodnoty právě když tyto body leží na zobecněné kružnici (tedy buď na přímce nebo na kružnici).

Dvojpoměr a převrácená hodnota: zobrazení $z \mapsto 1/z$ zachovává dvojpoměr nenulových bodů. Ukážeme to úpravou výrazu dvojpomer$(1/z_1, 1/z_2, 1/z_3, 1/z_4)$ do tvaru dvojpomer(z_1, z_2, z_3, z_4).

Úkol: Upravte
$$\frac{(1/z_3 - 1/z_1)(1/z_2 - 1/z_4)}{(1/z_2 - 1/z_1)(1/z_3 - 1/z_4)}$$
do tvaru
$$\frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)}.$$

Dvojpoměr a kruhová inverze.
Použijeme výše odvozené vlastnosti dvojpoměru k důkazu, že kruhová inverze převádí zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici. Kruhovou inverzi $z \mapsto 1/\overline{z}$ napíšeme jako složené zobrazení $z \mapsto 1/z \mapsto \overline{1/z}$. Druhé zobrazení $1/z = w \mapsto \overline{w} = \overline{1/z}$ je osovou symetrií zobrazující přímky na přímky a kružnice na kružnice.

O zobrazení $z \mapsto 1/z$ víme, že zachovává dvojpoměr. Odtud plyne, že čtveřici nenulových bodů ležících na společné zobecněné kružnici zobrazí na čtveřici bodů, které také leží na společné zobecněné kružnici.

Odtud plyne, že obrazem zobecněné kružnice neprocházející počátkem je zobecněná kružnice. A obrazem zobecněné kružnice procházející počátkem je zobecněná kružnice, ke které přidáme nekonečno jako obraz počátku.

Zbývá tedy rozmyslet si, že v prvním případě je obrazem kružnice a ve druhém přímka. To plyne například z toho, že okolí počátku, tedy kruh $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ se v kruhové inverzi zobrazí na okolí nekonečna $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\varepsilon\} \cup \{\infty\}$. Odtud plyne, že obraz zobecněné kružnice je omezený právě když zobecněná kružnice neobsahuje počátek.

Reference

[1] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf`.