Lineární zobrazení v komplexním oboru
17. října 2018

Cílem tohoto textu je ukázat, že lineární zobrazení v komplexním oboru popisují podobná zobrazení.

Odkazujeme čtenáře na stručný popis lineárních zobrazení v následujících textech

1. V [1] na straně 66 mezi definicí 4.2.5 invariantního bodu a definicí 4.2.6. V popisu lineární funkce značí $\mathbb{P}$ množinu nenulových komplexních čísel, $\mathbb{S}$ tzv. komplexní sféru $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2. V knize autorů Agarwal, Perera, Pinelas. Příslušné dvě strany knihy najde čtenář v archivu ukpe-2018-19. Kromě popisu obsahuje příklad s obrázkem.

V tomto textu vše ještě jednou stručně shrneme jinými slovy.

Definice. Ve shodě s výše zmiňovanými texty budeme pod lineárním zobrazením rozumět zobrazení

$$z \mapsto az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

Invariantní bod. V [1] najde čtenář definici pod číslem 4.2.5. My zde rozebereme počet invariantních bodů v závislosti na hodnotách a, b v (1). Rovnice invariantního bodu $z = az + b$ má jeden kořen pro $a \neq 1$, nemá žádný kořen pro $a = 1$, $b \neq 0$ a má nekonečně mnoho kořenů pro $a = 1$, $b = 0$.

Stručný přehled lineárních zobrazení.

1. $a = 1$, $b = 0$: identita

2. $a = 1$, $b \neq 0$: posunutí

3. V případě $a \neq 1$ má zobrazení (1) jeden invariantní bod $z_0 \in \mathbb{C}$. Označíme w obraz bodu $z \in \mathbb{C}$. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} w &= az + b \\ z_0 &= az_0 + b \end{aligned}$$

   Odečtením těchto rovnic dostaneme

$$w - z_0 = a(z - z_0)$$

   a případně další úpravou dostaneme

$$w = z_0 + a(z - z_0).$$

   K následující klasifikaci je potřeba, aby si čtenář zopakoval geometrický význam násobení komplexních čísel.

(a) $|a| = 1$, $a \neq 1$: otočení o úhel $\varphi = \arg a$ okolo bodu z_0, v případě $\varphi > 0$ v kladném směru (proti směru hodinových ručiček), v případě $\varphi < 0$ v záporném směru (po směru hodinových ručiček)

(b) $\arg a = 0$ (tzn. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$): stejnolehlost s koeficientem a a středem z_0

(c) Obecný případ je složení otočení o úhel $\varphi = \arg a$ a stejnolehlosti s koeficientem $|a|$.

Poměr bodů. *Poměrem navzájem různých bodů z_1, z_2, z_3 v komplexní rovině* budeme rozumět podíl

$$\mathrm{pomer}(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \tag{2}$$

V [1] je definován dvojpoměr bodů definicí 4.3.21. Čtenář si snadno rozmyslí, že to je podíl poměrů.

Čtenář pravděpodobně zná definici podobného zobrazení v rovině a ví co je to koeficient podobného zobrazení. Pro případné osvěžení paměti tyto pojmy zopakujeme.

Definice. Zobrazení bodů v rovině budeme nazývat *podobným zobrazením*, pokud existuje $k \in (0, +\infty)$ takové, že pro libovolnou dvojici bodů X_1, X_2 a jejich obrazy Y_1, Y_2 platí pro vzdálenosti $|X_1X_2|$, $|Y_1Y_2|$

$$|Y_1Y_2| = k|X_1X_2|$$

Číslo k nazýváme *koeficientem podobného zobrazení.*

Dále předpokládáme, že čtenář ví, že podobné zobrazení v rovině zobrazuje přímku na přímkui, že zachovává pořadí bodů na přímce a že zachovává úhel přímek.

Geometrický význam poměru bodů. Čtenář nechť si rozmyslí následující tvrzení. Doporučujeme nakreslit obrázek a zopakovat si geometrický význam rozdílu a podílu komplexních čísel.

1. Leží-li body z_1, z_2, z_3 ve vrcholech trojúhelníku, pak argument čísla (2) je roven úhlu ve vrcholu v bodě z_1. Znaménko argumentu popisuje, jestli se od ramene z_1z_2 k rameni z_1z_3 dostaneme po, nebo proti směru hodinových ručiček. Absolutní hodnota poměru (2) je rovna podílu stran trojúhelníku.

2. Z předchozího bodu plyne, že trojúhelníky abc, def (v jejichž vrcholech jsou komplexní čísla a, b, c, d, e, f) jsou si podobné právě když platí jeden ze vztahů

   (a) $\mathrm{pomer}(a, b, c) = \mathrm{pomer}(d, e, f)$, v tom případě je orientace úhlů při vrcholech a, d totožná

   (b) $\mathrm{pomer}(a, b, c) = \overline{\mathrm{pomer}(d, e, f)}$, v tom případě je orientace úhlů při vrcholech a, d opačná

3. $\mathrm{pomer}(a, b, c) \in \mathbb{R}$ právě když leží body a, b, c na přímce. Přitom bod a leží mezi body b, c právě když je $\mathrm{pomer}(a, b, c) < 0$.

V předchozím textu jsme ukázali, že lineární zobrazení (1) popisuje podobné zobrazení. Nyní ukážeme opačné tvrzení (opačnou implikaci), a sice, že každé podobné zobrazení, které navíc zachovává orientaci úhlu (tj. orientujeme-li úhel ve směru hodinových ručiček, pak je jeho obraz také orientován ve směru hodinových ručiček), lze popsat pomocí lineární funkce.

Věta. Nechť $z_1 \neq z_2$ jsou komplexní čísla a w_1, w_2 jejich obrazy v podobném zobrazení. Nechť toto podobné zobrazení zachovává orientaci úhlů. Pak pro obraz w bodu z platí

$$w = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

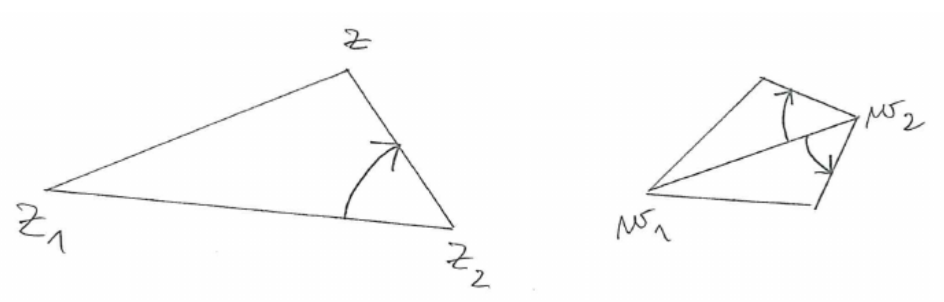
Důsledek. Podobné zobrazení zachovávající orientaci úhlů lze v komplexní rovině popsat lineární funkcí.

Důkaz věty. Budeme rozlišovat dva případy: bod z buď leží nebo neleží na přímce určené body z_1, z_2.

1. Pokud z na přímce $z_1 z_2$ neleží, pak tyto tři body tvoří trojúhelník. Z vlastností podobného zobrazení plyne, že je tento trojúhelník podobný trojúhelníku určenému obrazy w, w_1, w_2. Přidáme-li k podobnosti ještě požadavek zachování orientace úhlu, pak je obraz w určen jednoznačně a poměry vzorů a obrazů se rovnají

   $$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} \tag{3}$$

   Vyjádřením obrazu w z (3) pak dostáváme tvrzení věty.

   Na obrázku vlevo jsou znázorněny body z_1, z_2, z tvořící trojúhelník a u jednoho úhlu je zvolena a vyznačena jeho orientace. Na obrázku vpravo jsou k bodům w_1, w_2 dokresleny podobné trojúhelníky. Jeden z nich zachovává orientaci, druhý ji mění v opačnou.

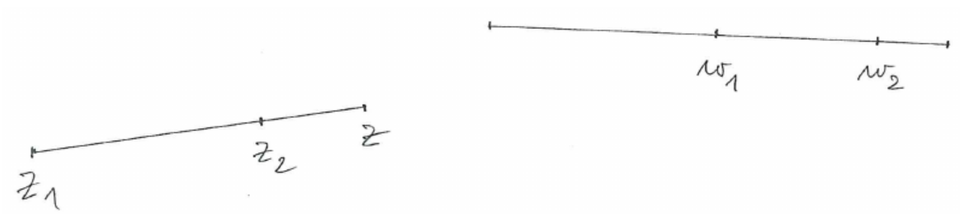
2. Zbývá probrat případ bodů ležících na společné přímce. Z definice podobného zobrazení plyne

   $$\frac{|z - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|w - w_1|}{|w_2 - w_1|}$$

Leží-li bod z na přímce určené body z_1, z_2, nabývá jejich poměr reálné hodnoty, tedy $(z - z_1)/(z_2 - z_1) \in \mathbb{R}$. Obraz přímky je v podobném zobrazení přímka, proto i body w_1, w_2, w leží na společné přímce. Odtud plyne $(w - w_1)/(w_2 - w_1) \in \mathbb{R}$. Nastává tedy jedna z možností

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} \tag{4}$$

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} \tag{5}$$



Na obrázku vlevo jsou vzory, na obrázku vpravo jsou obrazy. Bod z se zobrazí do jednoho z koncových bodů úsečky, podle (4) do pravého, podle (5) do levého. Vidíme, že (5) nezachovává pořadí bodů na přímce, proto platí (4). Odtud odvodíme, stejně jako v předchozím bodu, tvrzení věty.

$\square$

Reference

[1] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf`.