Řady funkcí

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
18. prosince 2018

1. Základní pojmy.
Obdobně jako v případě číselných řad budeme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1}$$

nazývat *(nekonečnou) řadou funkcí*. Součty

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \tag{2}$$

budeme nazývat *částečnými součty řady*.

Budeme říkat, že řada *konverguje v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, pokud má posloupnost částečných součtů $\{s_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní (tj. konečnou) limitu.

Budeme říkat, že řada *konverguje na množině* $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud má pro každé $x \in M$ posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu.

Limitu částečných součtů budeme nazývat *součtem řady*.

Podobně budeme definovat *absolutní konvergenci řady v bodě* x_0*, případně na množině* M – pokud konverguje posloupnost $\{\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\}_{n=1}^{\infty}$ pro $x = x_0$, případně pro $x \in M$.

2. Co nás bude zajímat.

1. Zda je součet řady spojitých funkcí spojitou funkcí. Přesněji: zda v případě funkcí f_k spojitých na množině M takových, že má řada (1) součet na M, je i součet spojitou funkcí na množině M.

2. Zda derivací člen po členu dostaneme řadu, jejíž součet je derivací součtu řady. Přesněji: zda pro funkce f_k, které mají na M derivaci a řada

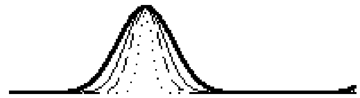
$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

konverguje na M, platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Uvidíme, že ani jedna z vlastností obecně neplatí. Obě ale platí pro mocninné řady.

3. Nespojitá limita spojitých funkcí.
Posloupnost $s_n(x) = (\sin x)^{2n}$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Na levém obrázku jsou postupně plnou silnou, plnou slabou, čárkovanou, tečkovanou čarou grafy funkcí s_1, s_2, s_3, s_4 na intervalu $[0, 4]$. Úmyslně jsme nenechali jsme vykreslit osy, snad je tak obrázek přehlednější. Vpravo jsou postupně na stejném intervalu grafy funkcí s_5, s_{10}, s_{20}, s_{100}.

Pro $x = \pi/2$ je $\sin x = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je tedy $s_n(\pi/2) = 1$.

Pro ostatní $x \in [0, 4]$ je $\sin^2 x \in [0, 1)$, a proto je $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$.

Vidíme, že posloupnost spojitých funkcí $\{s_n\}$ má limitu, která není spojitá. Zapíšeme tuto vlastnost pomocí limit. Funkce s_n jsou spojité, tedy

$$\lim_{x\to x_0} s_n(x) = s_n(x_0) \tag{3}$$

Limitu posloupnosti $\{s_n\}$ označíme s, tedy

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \tag{4}$$

Spojitost funkce s zapíšeme

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = s(x_0) \tag{5}$$

Dosadíme (4) do (5)

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0)$$

a na pravé straně dosadíme z (3)

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} s_n(x)$$

Vidíme, že spojitost limitní funkce odpovídá rovnosti limit počítaných v opačném pořadí.

Pojďme ještě celou věc vysvětlit na podobném příkladu. Spočítejme limitu výrazu x^n pro $x \to 1^-$ a $n \to \infty$. Spočítáme-li nejdříve limitu pro $x \to 1^-$ dostaneme 1^n a to je rovno jedné. Pro $n \to \infty$ pak dostaneme limitu konstantní posloupnosti rovnu jedné. Spočítáme-li limity v opačném pořadí, tedy nejdříve limitu pro $n \to \infty$, dostaneme pro x v levém okolí jedné limitu rovnu nule. Limita nuly je pak pro $x \to 1^-$ rovna nule.

Poznamenejme ještě, že stejné vlastnosti mají nekonečné součty. Součet řady definujeme jako limitu částečných součtů. Posloupnost $\{s_n\}$ lze vyjádřit jako posloupnost částečných součtů, zvolíme-li $a_1 = s_1$ a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zvolíme $a_n = s_n - s_{n-1}$. Pak je $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

4. Derivace řady člen po členu.
Upravíme derivaci součtu řady. V prvním kroku jen napíšeme definici derivace. Ve druhém definici součtu nekonečné řady. Ve třetím použijeme větu o limitě rozdílu a násobku.

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right)' &= \lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a(x+h) - \sum_{k=1}^{\infty} a(x)\right)/h \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a(x+h) - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a(x)\right)/h \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a(x+h)-a(x)}{h}
\end{aligned}
$$

Upravíme součet řady derivací. V prvním kroku napíšeme definici součtu řady. Ve druhém definici derivace. Ve třetím použijeme větu o limitě součtu.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a'_k(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a'_k(x) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lim_{h\to 0}\frac{a_k(x+h)-a_k(x)}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(x+h)-a_k(x)}{h}
\end{aligned}
$$

Dostali jsme stejné výrazy s prohozeným pořadím limit. V minulém odstavci jsme viděli, že obecně na pořadí limit záleží. Proto uděláme závěr, že obecně nemáme zajištěno, že věta o derivaci součtu platí i pro nekonečný počet sčítanců.

5. Komplexní čísla.
Budeme pracovat s funkcemi komplexní proměnné a budeme potřebovat vztahy $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ap.

Úkol: Dokažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ a pro $z_2 \ne 0$ platí $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$. A pro $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ platí $|z^k| = |z|^k$.

6. Základní pojmy v komplexním oboru.
V úvodním odstavci jsme zavedli základní pojmy v reálném oboru. Pro rozšíření pojmů do komplexního oboru potřebujeme definici limity posloupnosti. Tu najde čtenář v [1] na straně 15, vztah (1.4).

Před ní v označení 1.2.1 najdete definici okolí bodu a prstencového okolí. Výrok $z_n \in U_\varepsilon(z)$ lze pomocí absolutní hodnoty přepsat $|z_n - z| < \varepsilon$. Pak je definice limity posloupnosti v komplexním oboru formálně stejná jako v reálném oboru. Upozorníme jen, že nelze použít zápis $z_n \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Zejména proto, že na množině komplexních čísel není definováno uspořádání.

Dále budeme potřebovat pojem limity funkcí v komplexním oboru a od limity odvozený pojem derivace. Definici limity funkce najde čtenář v [1] pod číslem (1.5). Formálně je stejná jako v reálném oboru.

Definici derivace najde čtenář v [1] na začátku odstavce 1.4. Opět je formálně stejná jako v reálném oboru.

Jediná odchylka je, že v komplexním oboru je okolí kruh a prstencové okolí je kruh bez svého středu. V reálném oboru je okolí interval a prstencové okolí je interval bez svého prostředního bodu.

7. Holomorfní funkce.

Definici holomorfní funkce najde čtenář v [1] pod číslem 1.4.3.

Důležitá je věta 5.5.3 o funkci holomorfní na otevřené množině. Přitom pro nás nejsou zajímavé vzorce v 1), 2) s křivkovými integrály (hlavně proto, že jsme se křivkovým integrálům nevěnovali). Důležitý je důsledek vztahu (5.32) v bodu 2): v bodě $\zeta \in G$ má funkce holomorfní na G derivace všech řádů. V bodě 3) navíc tvrdíme, že Taylorova řada se středem v bodě ζ konverguje na největším kruhu se středem v ζ, který je podmnožinou G – viz OBRÁZEK – TODO.

Ve znění věty jsou koeficienty Taylorovy řady označeny a_k, definici Taylorovy řady najde čtenář v [1] pod číslem 2.3.4, my zde připomeňme, že je v ní $a_k = f^{(k)}(\zeta)/k!$.

Ukážeme, že na množině reálných čísel je situace odlišná.

Například funkce $f : x \mapsto x|x|$ má na $\mathbb{R}$ derivaci $f' : x \mapsto 2|x|$, ale v bodě nula nemá f druhou derivaci. Srovnejte s tvrzením 2) věty 5.5.3.

Funkce g má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů. Níže ukážeme, že v bodě nula jsou všechny její derivace rovny nule, tedy Taylorova řada je nulová funkce, zatímco funkce g nabývá mimo nulu kladných hodnot. Srovnejte s rovností v bodě 3) věty 5.5.3.

$$g \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Spočítejme tedy derivace funkce g v bodě nula. Nemůžeme použít derivaci podle vzorců, musíme počítat přímo z definice. V prvním kroku napíšeme definici a ve druhém do ní dosadíme

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(-1/h^2)}{h}$$

Limitu spočítáme substitucí $H = 1/h$. Pro $h \to 0^+$ je $H \to +\infty$, pro $h \to 0^-$ je $H \to -\infty$. Uvidíme, že obě limity – pro $H \to \pm\infty$ – vyjdou stejně, proto si zjednodušíme zápis a budeme je psát najednou. Po substituci dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(-1/h^2)}{h} = \lim_{H\to\pm\infty} H \exp(-H^2)$$

Limitu napravo spočítáme L'Hospitalovým pravidlem (ověřte předpoklady jeho použití)

$$\lim_{H\to\pm\infty} H \exp(-H^2) = \lim_{H\to\pm\infty} \frac{H}{\exp(H^2)} \text{ L'H } \lim_{H\to\pm\infty} \frac{1}{2H \exp(H^2)}$$

Výsledná limita je rovna nule, proto je $g'(0) = 0$.

Druhou derivaci spočítáme podobně

$$g''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h) - g'(0)}{h}$$

h je z prstencového okolí nuly, tedy $h \neq 0$, proto $g'(h)$ spočítáme derivováním podle vzorců. Za $g'(0)$ dosadíme výše vypočtenou hodnotu $g'(0) = 0$. Dostaneme

$$g''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2h^{-3} \exp(-h^{-2}) - 0}{h}$$

Po úpravě a substituci $H = 1/h$ dostaneme

$$g''(0) = \lim_{H\to\pm\infty} \frac{2H^4}{\exp(H^2)}$$

Opět použijeme L'Hospitalovo pravidlo a dojdeme k výsledku $g''(0) = 0$.

Stejným způsobem spočítáme další derivace a nahlédneme, že po substituci vždy dostaneme limitu ze zlomku s polynomem proměnné H v čitateli a $\exp(H^2)$ ve jmenovateli. Dostatečný počet aplikací L'Hospitalova pravidla sníží stupeň v čitateli na nulu (tj. v čitateli bude konstanta – polynom nulového stupně), zatímco ve jmenovateli bude součin polynomu a výrazu $\exp(H^2)$. Limita tohoto výrazu je nula, tedy i derivace $g^{(n)}(0)$ je rovna nule.

8. Mocninné řady v komplexním oboru.
Základní definice najde čtenář v [1], začátek druhé kapitoly, definice 2.1.1, příklad 2.2.2.

Pro odkazy v textu zde uvedeme mocninnou řadu se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_k \in \mathbb{C}$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{6}$$

9. Předpokládané znalosti.
V odstavcích 10 – 13 pojednáváme podrobně o mocninných řadách, vyslovujeme věty a dokazujeme je. Zde stručně připomeneme vlastnosti řad a posloupností, které předpokládáme, že čtenář zná.

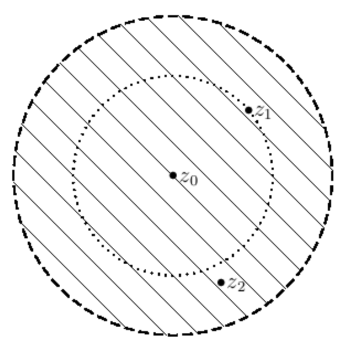
1. **Součet konečné geometrické řady** je pro kvocient $q \neq 1$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2. **Součet nekonečné geometrické řady** – posloupnost $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ má pro $|q| < 1$ limitu rovnu nule. Odtud pro tato q plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a_1}{1 - q}$$

Konvergenci geometrické řady s kvocientem q, $|q| < 1$ opakovaně využijeme v důkazech: je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ střed mocninné řady a zvolíme-li body $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tak, že je z_1 blíž k z_0 než z_2, tedy je $|z_1 - z_0| < |z_2 - z_0|$, pak je $|z_1 - z_0|/|z_2 - z_0| \in [0, 1)$ a tedy následující řada konverguje.



$$\sum_{k=0}^{\infty} (|z_1 - z_0|/|z_2 - z_0|)^k$$

3. **Nutná podmínka konvergence** řady je nulová limita posloupnosti členů řady. Formálně zapsáno, je-li

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \quad \text{(tedy limita } s \text{ je konečná)},$$

pak i $s_{n-1} \to s$ a
$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

4. **Konvergentní posloupnost je omezená.** Formálně zapsáno
$$\text{je-li} \quad a_n \to L \in \mathbb{R} \quad \text{pak} \quad (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq M)$$
Speciálně pro konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ odtud a z nutné podmínky konvergence plyne existence $M \in \mathbb{R}$ takového, že
$$(\forall k \in \mathbb{N})(|a_k| \leq M)$$

5. **„Zbytky částečných součtů" konvergentní řady se blíží k nule.** Pro konvergentní řadu platí
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s \in \mathbb{R}$$
Pro „zbytky částečných součtů", tedy součty od členu $n+1$ po nekonečno z_n (viz dole) platí $s_n + z_n = s$ a tedy $z_n = s - s_n$. Proto je $\lim_{n\to\infty} z_n = s - s = 0$.
$$z_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$
Tuto vlastnost použijeme v závěru důkazu spojitosti součtu mocninné řady v odstavci 11.

10. Věta o poloměru konvergence.
Připomeňme, že okolí bodu $z \in \mathbb{C}$ značíme buď symbolem[1] $B_r(z_0)$ nebo $U_r(z_0)$ a je rovno množině bodů z komplexní roviny, které mají vzdálenost od bodu z_0 menší než r. Formálně zapsáno
$$B_r(z_0) = U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

Věta o poloměru konvergence mocninné řady. Ke každé mocninné řadě (6) existuje číslo $R \in [0, +\infty]$ takové, že platí

1. V případě $R = 0$ řada absolutně konverguje pro $z = z_0$ a pro ostatní z nekonverguje a navíc je množina jejích členů $\{a_k(z - z_0)^k : k \in \mathbb{N}\}$ neomezená.

2. V případě $R = +\infty$ řada konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

3. V případě $0 < R < +\infty$

   (a) Řada (6) konverguje absolutně pro $z \in U_R(z_0)$. Množinu $U_R(z_0)$ nazýváme *kruhem konvergence mocninné řady.*

[1] V textu Jiřího Veselého [1] je použit symbol U. Na začátku článku 1.2 o topologických a metrických vlastnostech prostoru komplexních čísel Jiří Veselý píše, že prostory $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou izometricky izomorfní a ve svém textu o metrických prostorech pro okolí používá symbol B. Za zmínku stojí, že B je z anglického ball a U z německého umgebung (okolí).

(b) Pro $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$, tedy pro body z vně kruhu konvergence, řada (6) nekonverguje ani neabsolutně. Navíc je množina jejích členů $\{a_k(z - z_0)^k : k \in \mathbb{N}\}$ neomezená.

(c) Pro $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, tedy na hraniční kružnici kruhu konvergence, řada (6) může a nemusí konvergovat. Pokud ale v jednom bodě kružnice konverguje absolutně, pak konverguje absolutně na celé kružnici.

4. V případě, že existuje limita vpravo, tak platí

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \tag{7}$$

Čtenář najde obrázek charakterizující větu v [1] na straně 43 (elektronická strana 48). Najde tam i příklad 2.2.6 uvádějící řady s různými hodnotami poloměru konvergence od nuly po nekonečno.

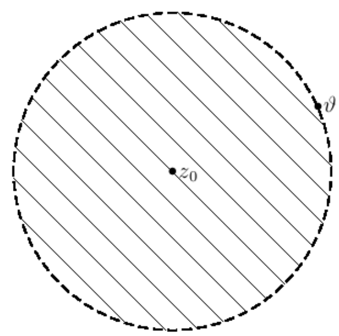
Důkaz věty o poloměru konvergence mocninné řady přebíráme z [1]. V poznámce 2.3.2 je odvozen vzorec (2.8) a v případě existence limity (7) odtud plynou i další tvrzení věty.

Při neexistenci limity (7) je důkaz založen na lemmatu 2.2.3.

Lemma 2.2.3 a jeho důkaz nechť si čtenář laskavě přečte v [1]. My ho zde doprovázíme následujícím obrázkem.

K důkazu ještě připomínáme, že nutná podmínka konvergence řady je nulová limita n-tého členu řady. Platí to v reálném i komplexním oboru.[a]
Omezenost členů posloupnosti je vlastnost každé konvergentní posloupnosti.

[a]Pomocí částečných součtů lze n-tý člen vyjádřit $a_n = s_n - s_{n-1}$ a pro konvergentní posloupnost se součtem s platí $s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$.



Definujme nyní

$$R = \sup\{|z| : \text{řada (6) konverguje}\}$$

Nakreslete si (nebo si ji představte) kružnici se středem v bodě z_0 a poloměrem R. Z definice R plyne, že libovolně blízko hraniční kružnici leží bod, v němž řada (6) konverguje. Odtud a z lemmatu 2.2.3 plyne, že řada (6) absolutně konverguje v celém kruhu $U_R(z_0)$.

V bodě z vně kruhu ($|z - z_0| > R$) nemohou být členy řady omezené, protože by pak řada (6) absolutně konvergovala v kruhu $U_{|z-z_0|}(z_0)$ (viz též lemma 2.2.5 v [1].)

11. Věta o spojitosti mocninné řady na kruhu konvergence.
V minulém odstavci jsme definovali poloměr konvergence mocninné řady $R \in [0, +\infty]$ a ukázali jeho vlastnosti. Kruh $U_R(z_0)$ budeme nazývat *kruhem konvergence*.

V tomto odstavci ukážeme, že součet mocninné řady je na kruhu konvergence spojitou funkcí. Nemůže se tedy pro mocninnou řadu stát to, co v odstavci 3 s řadou s částečným součtem $s_n(x) = (\sin x)^{2n}$.

Označme $s(z)$ součet mocninné řady

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{8}$$

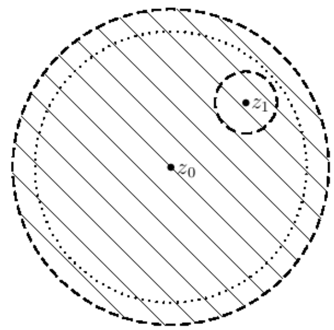
a $s_n(z)$ její částečné součty

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \tag{9}$$

Odhadneme shora hodnotu výrazu $|s(z_1) - s(z_2)|$ – vložíme výraz s nulovou hodnotou a použijeme trojúhelníkovou nerovnost $|a + b + c| \le |a| + |b| + |c|$

$$\begin{aligned} |s(z_1) - s(z_2)| &= |s(z_1) - s_n(z_1) + s_n(z_1) - s_n(z_2) + s_n(z_2) - s(z_2)| \le \\ &\le |s(z_1) - s_n(z_1)| + |s_n(z_1) - s_n(z_2)| + |s_n(z_2) - s(z_2)| \end{aligned} \tag{10}$$

Zvolíme z_1 uvnitř kruhu konvergence $U_R(z_0)$. Okolo bodu z_1 nakreslíme kruh $U_\delta(z_1)$ ležící uvnitř kruhu konvergence a nedotýkající se hranice kruhu konvergence (tj. platí $|z_1 - z_0| + \delta < R$). Dále zvolíme r – poloměr tečkované kružnice se středem v bodě z_0: $r < R$ (kružnice je uvnitř kruhu konvergence), $r > |z_1 - z_0| + \delta$ (kruh $U_\delta(z_1)$ leží uvnitř kružnice a nedotýká se jí). Pro $z \in U_r(z_0)$ a $m > n$ platí (opět použijeme trojúhelníkovou nerovnost, tentokrát na $m - n$ sčítanců)



$$|s_m(z) - s_n(z)| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k (z - z_0)^k| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k (z - z_0)^k|$$

a dále, protože je $|z - z_0| < r$, odtud plyne

$$|s_m(z) - s_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| r^k$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme

$$|s(z) - s_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

Tečkovanou kružnici jsme zvolili uvnitř kruhu konvergence. Proto je $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < +\infty$ a odtud plyne, že volbou dostatečně velkého n můžeme dosáhnout[2]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k < \frac{\varepsilon}{3} \tag{11}$$

První a třetí sčítanec pravé strany (10) je tedy menší než $\varepsilon/3$. Protože je s_n spojitá funkce, existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro $z_2 \in U_{\delta_1}(z_1)$ je i prostřední člen menší než $\varepsilon/3$. Odtud dostaneme pro $z_2 \in U_{\min\{\delta,\delta_1\}}(z_1)$[3]

$$|s(z_1) - s(z_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

a tedy spojitost součtu s v bodě z_1.

[2] Viz bod 5 z odstavce 9.

[3] Tedy platí $|z_2 - z_1| < \delta$ i $|z_1 - z_2| < \delta_1$.

12. Věta o poloměru konvergence řady zderivované člen po členu.
Ukážeme, že řada (6) a řada z ní vzniklá derivací člen po členu, tedy řada (12), mají stejný poloměr konvergence. Označme R poloměr konvergence řady (6) a R_{der} poloměr konvergence řady (12).

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1} \tag{12}$$

Z nerovnosti $|ka_k| \geq |a_k|$ platné pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ plyne nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k| \leq (z-z_0) \sum_{k=1}^{\infty} |ka_k(z-z_0)^{k-1}|$$

a z této nerovnosti plyne implikace

$$\sum_{k=0}^{\infty} |ka_k(z-z_0)^{k-1}| \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k| \in \mathbb{R}$$

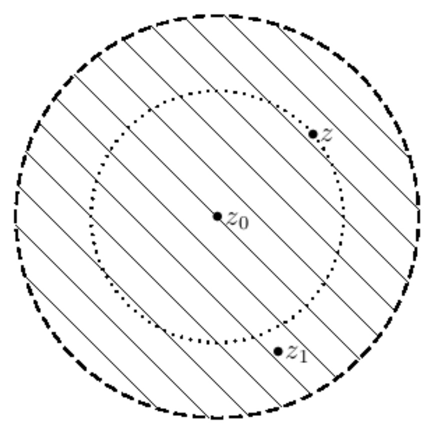
a odtud plyne $R_{\mathrm{der}} \leq R$.

Abychom dokázali rovnost poloměrů, potřebujeme ukázat opačnou nerovnost $R \leq R_{\mathrm{der}}$, která je ekvivalentní opačné implikaci

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k| \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |ka_k(z-z_0)^{k-1}| \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Zvolme $z \in B_R(z_0)$ a k němu z_1 (viz obrázek) splňující

$$|z-z_0| < |z_1-z_0| < R$$



Upravíme (vynásobením výrazem rovným jedné)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |ka_k(z-z_0)^{k-1}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \left|a_k(z_1-z_0)^{k-1}\right| \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^{k-1}$$

Z $z_1 \in B_R(z_0)$ plyne absolutní konvergence řady (6) pro $z = z_1$ a odtud omezenost členů této řady (nutná podmínka konvergence) a tedy existence konstanty $M \in (0, +\infty)$ splňující

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\left|a_k(z_1-z_0)^k\right| \leq M)$$

K dokázání implikace (13) pak stačí ukázat (14) a použít srovnávací kritérium

$$\sum_{k=0}^{\infty} kM \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^k \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Označíme $q = |z-z_0|/|z_1-z_0| \in [0,1)$ a přepíšeme (14) na

$$\sum_{k=0}^{\infty} kMq^k \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Ukážeme dva různé postupy, jak (15) dokázat.

1. Napišme (15) ve tvaru
$$\sum_{k=0}^{\infty} kMq^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Mq^k$$
a použijme, že řada s nezápornými členy nemění součet po přeházení pořadí členů. Přeházením dostaneme řadu
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} Mq^k$$
K sečtení této řady použijeme vzorec pro součet geometrické řady. Připomeňme, že $q \in [0, 1)$.
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} Mq^k = \sum_{i=1}^{\infty} M\frac{q^i}{1-q} = M\frac{q}{(1-q)^2}$$

2. K číslům z, z_1 zvolíme z_2 splňující $|z-z_0| < |z_2-z_0| < |z_1-z_0|$ a řadu (14) upravíme
$$\sum_{k=0}^{\infty} kM\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^k = \sum_{k=0}^{\infty} kM\left|\frac{z-z_0}{z_2-z_0}\right|^k\left|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right|^k$$
Označíme $q_2 = |z-z_0|/|z_2-z_0|$, víme, že $q_2 \in [0, 1)$ a níže ukážeme existenci $M_2 \in (0, +\infty)$ takového, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí
$$|kMq_2^k| \leq M_2 \tag{16}$$
Odtud pak plyne
$$\sum_{k=0}^{\infty} kM\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_2\left|\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}\right|^k$$
a protože řada napravo konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria i řada nalevo.

Dokažme tedy (16). Spočítáme podíl sousedních členů
$$\frac{|(k+1)Mq_2^{k+1}|}{|kMq_2^k|} = \frac{k+1}{k}q_2$$
Tento podíl má pro $k \to \infty$ limitu rovnu $q \in [0, 1)$. odtud plyne, že je posloupnost $\{|kMq_2^k|\}_{k=1}^{\infty}$ od určitého členu klesající. Zároveň víme, že její členy jsou kladné. Odtud plyne, že má posloupnost maximální prvek a ten můžeme zvolit za M_2.

13. Věta o derivaci mocninné řady člen po členu.

Pro poloměr konvergence R řady (6) a $z \in B_R(z_0)$ označíme $f(z)$ součet řady (6). Pro $z, w \in B_R(z_0)$ upravíme výraz $f(w) - f(z)$.

V první úpravě dosadíme za $f(z)$, $f(w)$, ve druhém použijeme větu o limitě rozdílu (připomínáme, že součet nekonečné řady je limita částečných součtů), ve třetím použijeme vzorec $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + B^{k-1})$, ve čtvrtém použijeme větu o limitě násobku

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(w-z_0)^k - (z-z_0)^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-z) \left[(w-z_0)^{k-1} + (w-z_0)^{k-2}(z-z_0) + \cdots + (z-z_0)^{k-1}\right] \\ &= (w-z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(w-z_0)^{k-1} + (w-z_0)^{k-2}(z-z_0) + \cdots + (z-z_0)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

Dosazením do $(f(w) - f(z))/(w-z)$ dostaneme

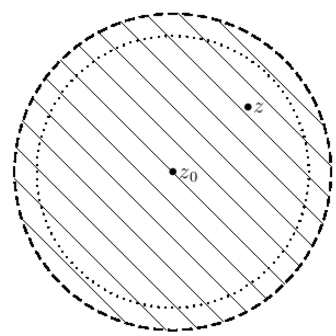
$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(w-z_0)^{k-1} + (w-z_0)^{k-2}(z-z_0) + \cdots + (z-z_0)^{k-1}\right] \qquad (17)$$

Definujme nyní funkci

$$g : w \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in B_R(z_0) \setminus \{z\} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1} & w = z \end{cases}$$

K dokázání tvrzení o derivaci mocninné řady člen po členu v bodě z stačí ukázat spojitost funkce g v bodě z.

Zvolme pevné $z \in U_R(z_0)$ a poloměr tečkované kružnice r splňující $r < R$ (kružnice leží uvnitř kruhu konvergence) a $|z - z_0| < r$ (bod z leží uvnitř kruhu $U_r(z_0)$. Pro $w \in U_r(z_0)$ označme (člen řady v (17))



$$f_k(w) = a_k \left[(w-z_0)^{k-1} + (w-z_0)^{k-2}(z-z_0) + \cdots + (z-z_0)^{k-1}\right]$$

Platí

$$\lim_{w \to z} f_k(w) = a_k k (z-z_0)^{k-1}$$

My chceme ukázat spojitost funkce g v bodě z, tedy

$$\lim_{w \to z} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1}$$

Důkaz je stejný jako důkaz spojitosti mocninné řady v odstavci 11, potřebujeme k němu obdobu vztahu (11), v následujícím ji odvodíme.

Upravme pro $w, z \in U_r(z_0)$

$$\begin{aligned} |f_k(w)| &= |a_k \left[(w-z_0)^{k-1} + (w-z_0)^{k-2}(z-z_0) + \cdots + (z-z_0)^{k-1}\right]| \\ &\le |a_k| \left[|w-z_0|^{k-1} + |w-z_0|^{k-2}|z-z_0| + \cdots + |z-z_0|^{k-1}\right]| \\ &\le |a_k| k r^{k-1} \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(w)| \leq \sum_{k=in+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1} \tag{18}$$

Protože kružnice $U_r(z_0)$ leží v kruhu konvergence, lze dle bodu 5 odstavce 9 zvolit n tak, aby pravá a tedy i levá strana nerovnosti (18) byla menší než $\varepsilon/3$.

14. Připomenutí Taylorových polynomů.
TODO: TAYLOROVY POLYNOMY FUNKCÍ EXP, SIN, COS, LAGRANGEŮV TVAR ZBYTKU, DŮKAZ, ŽE JMENOVANÉ FUNKCE SE ROVNAJÍ SOUČTU SVÝCH TAYLOROVÝCH ŘAD.

15. Definice elementárních funkcí v komplexním oboru.
Exponenciální funkci a goniometrické funkce definujeme jako součet mocninných řad.

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

Úlohy.

1. Ukažte, že poloměry konvergence všech tří řad jsou rovny nekonečnu.
2. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \tag{19}$$
3. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\sin(-z) = -\sin(z) \qquad \cos(-z) = \cos(z)$$
4. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \\ \cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \end{aligned}$$
5. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i\,\frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \\ \sin(z) &= -i\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} \end{aligned}$$

K odvození vztahu $\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$ použijeme (19) pro $z = y$ a dále potřebujeme vztah

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})(\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)) \tag{20}$$

Tento vztah lze odvodit buď z definice exponenciální funkce (zatím vynecháme, později doplníme) nebo pomocí věty o jednoznačnosti (viz odstavec 16).

Řešení rovnic s neznámou z a zadanou pravou stranou w

1. $\exp(z) = w$
   Použijeme vztah $\exp(x+iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$ a řešíme rovnici s reálnou proměnnou x: $\exp x = |w|$ a rovnici s reálnou proměnnou y: $y \in \operatorname{Arg} w$.

2. $\sin(z) = w$
   Vyjádříme $\sin(z)$ pomocí $\exp(iz)$, $\exp(-iz)$.
   Po substituci $w = \exp(iz)$, $\exp(-iz) = 1/w$ přejde naše rovnice na kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme a dle bodu 1 spočítáme z.

3. $\cos(z) = w$
   Řešíme analogicky jako v bodě 2.

Logaritmus definujeme jako mnohoznačnou inverzní funkci k exponenciální funkci. Hlavní hodnota logaritmu je ta z hodnot logaritmů, která má imaginární část z intervalu $(-\pi, \pi]$.

16. Věta o jednoznačnosti a její použití.
Věty o jednoznačnosti jsou v [1] pod čísly 2.4.3, 5.7.1. Říkají, že funkce definovaná na reálné ose má maximálně jedno rozšíření na funkci mající derivaci v komplexním oboru.

Nás bude zajímat případ funkce která má v $\mathbb{C}$ derivaci a je nulová na reálné ose, např. $f(z) = \sin(2z) - 2\sin z \cos z$. Z věty o jednoznačnosti pak plyne $f(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$. Odtud pak plyne platnost vztahu $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ v komplexním oboru.

Jako další důsledek uvedeme odvození vztahu pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \tag{21}$$

Vezměme pevné $z_1 \in \mathbb{R}$ a funkci $f(z) = \exp(z_1 + z) - \exp(z_1)\exp(z)$. Víme, že pro $z \in \mathbb{R}$ je $f(z) = 0$ a že funkce f má v $\mathbb{C}$ derivaci. Z věty o jednoznačnosti pak plyne $f(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$. Jinými slovy (21) platí pro $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{C}$. Zvolme nyní $z_2 \in \mathbb{C}$ a funkci $g(z) = \exp(z + z_2) - \exp(z)\exp(z_2)$, o které víme, že pro $z \in \mathbb{R}$ je $g(z) = 0$ a funkce g má derivaci na $\mathbb{C}$. Z věty o jednoznačnosti pak plyne $g(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$ a tedy (21) pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Reference

[1] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf`.