Úvod do analýzy komplexní proměnné

9. prosince 2018

Komplexní čísla

Téma komplexních čísel je velice náročné, a proto je nejprve důležité si říct, co vlastně komplexní čísla znamenají. To uděláme pomocí několika definic, z nichž dvě jsou elementárnější a pro nás důležité a zbylé tři jsou náročnější a pro nás tím pádem nadrámcové (což ale nijak neznamená, že mají být opomenuty). Poslední tři definice tak zmiňujeme pouze jako možnost k dalšímu prostudování.

1. středoškolská definice {1}

Tato definice zavádí komplexní čísla takto:

$$a + ib, \quad \text{kde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{a kde} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Často se používá (jak je z nadpisu patrné) na středních školách, avšak není to až tak šťastná volba, jak záhy zjistíme, protože zde dochází k rozporu. Vezměme zlomek $\frac{1}{i}$ a nejprve ho počítejme rozšířením a podruhé ho počítejme přímým dosazením za předpokladu, že $i = \sqrt{-1}$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i,$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = i.$$

Rozepsáním je zřejmé, že zde dochází ke sporu, i když jsme v obou případech počítali s předpokladem $i = \sqrt{-1}$. Z tohoto důvodu je lepší tuto definici obměnit. Za předpokladu, že má čtenář pokročilejší znalosti z algebry lze použít 3. definice.

2. definice

Nyní se ale podíváme na druhou možnou definici, kterou lze použít při zavádění komplexních čísel. Tato definice má jisté výhody, proto ji uvádíme jako jednu z důležitých. Zadefinujme si tedy komplexní čísla následujícím způsobem:

Vezměme algebraickou strukturu $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, kde $\oplus$, $\odot$ jsou binární operace na $\mathbb{R}^2$ (tzn. dvojici prvků z $\mathbb{R}^2$ přiřadí prvek z $\mathbb{R}^2$) a jsou definovány vztahem:

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \odot [c, d] = [ac - bd, ad + bc]$$

Výše zmíněnou výhodou této definice je to, že nás nemusí trápit vztahy platící pro i. Proto se nyní můžeme zaměřit na zkoumání této algebraické struktury a určení toho, zda se jedná o okruh či těleso.

Vlastnosti

Je nutné si nejprve ujasnit vlastnosti, které v této algebraické struktuře platí a z nichž můžeme dále vycházet.

- $[0,1] \odot [0,1] = [-1,0]$
- $[x,0] \odot [y,0] = [xy,0]$
- $[x,0] \oplus [y,0] = [x+y,0]$,
  tedy když vezmeme množinu $[x,0]$ s operacemi $\oplus, \odot$, matematicky zapsáno $([x,0] : x \in \mathbb{R}, \oplus, \odot)$, vidíme, že je izomorfní s $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Zavedeme-li označení $i \equiv [0,1]$ a $x \equiv [x,0]$ pro $x \in \mathbb{R}$, potom platí

1. $i \cdot i = [-1,0] = -1$
2. $[b,0] \odot [0,1] = [b0 - 01, b1 + 00] = [0,b]$
3. $[a,b] = [a,0] \oplus [0,b] = a + bi$

Cíl

Naším cílem je ukázat, že komplexní čísla tvoří těleso. V této definici si dáme tu práci, že si každou vlastnost tělesa ukážeme a tím potvrdíme platnost těchto axiomů. Připomeňme jen, že operace $+, \cdot$ jsou operace na reálných číslech a mají tedy „normální“ vlastnosti.

- Komutativita:
$$[a,b] \oplus [c,d] = [a+c, b+d];$$
$$[c,d] \oplus [a,b] = [c+a, d+b].$$
- Asociativita:
$$[a,b] \oplus ([c,d] \oplus [e,f]) = [a,b] \oplus [c+e, d+f] = [a+c+e, b+d+f];$$
$$([a,b] \oplus [c,d]) \oplus [e,f] = [a+c, b+d] \oplus [e,f] = [a+c+e, b+d+f].$$
- Nulový prvek:
$$[a,b] \oplus [0,0] = [a+0, b+0] = [a,b].$$
- Opačný prvek:
$$[a,b] \oplus [-a,-b] = [a+(-a), b+(-b)] = [0,0].$$
- Komutativita:
$$[a,b] \odot [c,d] = [ac - bd, ad + bc];$$
$$[c,d] \odot [a,b] = [ca - db, cb + da].$$

- Asociativita:

$$[a,b] \odot ([c,d] \odot [e,f]) = [a,b] \odot [ce-df, cf+de] =$$
$$= [a(ce-df) - b(cf+de), a(cf+de) + b(ce-df)] =$$
$$= [ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf];$$
$$([a,b] \odot [c,d]) \odot [e,f] = [ac-bd, ad+bc] \odot [e,f] =$$
$$= [(ac-bd)e - (ad+bc)f, (ac-bd)f + (ad+bc)e] =$$
$$= [ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce].$$

- Jednotkový prvek:

$$[a,b] \odot [1,0] = [a-0, 0+b] = [a,b].$$

- Existuje inverzní prvek?

$$[a,b] \odot [x,y] \overset{=}{?} [1,0]$$

  Řešíme soustavu:
$$ax - by = 1$$
$$ay + by = 0,$$
  řešíme tedy determinant matice soustavy: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0.$

  Nyní si připomeňme, jak přesně zní axiom o inverzním prvku:

  pro každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existuje inverzní prvek (značíme ho z^{-1}) tak, že platí $z(z^{-1}) = 1$.

  Determinant je tedy nenulový, matice je regulární a proto existuje řešení soustavy, z čehož dále vyvozujeme existenci inverzního prvku.

- Distributivita:

$$[a,b] \odot ([c,d] \oplus [e,f]) = [a,b] \odot ([c+e, d+f]) =$$
$$= [a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)] =$$
$$= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be];$$
$$[a,b] \odot ([c,d] \oplus [e,f]) = [ac-bd, ad+bc] \oplus [ae-bf, af+be] =$$
$$= [ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be].$$

Ke dvěma již ukázaným definicím bychom rády ještě zmínily další tři definice, které jsou nadrámcové, nicméně pro ty čtenáře, kteří mají pokročilejší znalosti z algebry, mohou být užitečnější než dvě výše zmíněné definice.
Jedná se o následující tři definice, u nichž zmiňujeme pouze jejich podstatu.

3. definice

Komplexní čísla zavádíme následovně:

$$a + ib, \quad \text{kde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{a kde} \quad i^2 = -1$$

4. definice - Kořenové nadtěleso

Jádro této definice spočívá v tom, že k tělesu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ přidáme kořen rovnice $x^2 + 1 = 0$.

5. definice - Okruh polynomů nad $\mathbb{R}$

Jedná se o zbytkové třídy při dělení polynomem $P(x) = x^2 + 1$.
Máme dva polynomy, označme je R a Q, které patří do stejné třídy, pokud existuje polynom S takový, že platí

$$R - Q = P \cdot S.$$