Písemná část zkoušky z předmětu UKPE
12. prosince 2018

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Pečlivě čtěte zadání. Vypočtěte a zobrazte je něco jiného než zobrazte (v tom případě máte v průběhu výpočtu odmocňovat „nehezké“ číslo a není nutné počítat jeho argument, stačí ho zakreslit). Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka znamená, že ke konstrukci nepoužijete výpočty. Ve všech případech by mělo být z vaší práce zřejmé, jak jste postupovali.

Ve skutečné písemce nebude žádný návod (jako zde u posledního příkladu). V této vzorové písemce se po konzultaci se studenty může objevit návod u dalších příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Vypočtěte kořeny rovnic v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.
   (a) $(z+2)^3 = -i$
   (b) $z^2 + iz = 2$
2. Zobrazte v komplexní rovině kořeny rovnice
   (a) $z^2 + (1-2i)z - 2 = 0$
   (b) $z^2 + iz - 2 + i = 0$
3. Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+3i$. Poté zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka obraz jejich podílu a porovnejte jeho polohu s vypočtenou hodnotou.
4. Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ a číslo $z = z_1/(z_1 + z_2)$. Číslo z zobrazte dvěma způsoby: pomocí pravítka a kružítka z obrazů čísel z_1, z_2 a výpočtem. Oba výsledky porovnejte.

5. Vypočtěte poměr bodů $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 1 + 2i$ a z tohoto poměru vypočtěte velikost úhlu s vrcholem v bodě z_1 a s rameny procházejícími body z_2, z_3. Body poté zobrazte v komplexní rovině a vypočtený úhel porovnejte s obrázkem.

6. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $z_1 = 2$ na bod $w_1 = 2 + 2i$ a bod $z_2 = -1 + i$ na bod $w_2 = 3i$. Vypočtěte koeficient tohoto podobného zobrazení. Typem podobného zobrazení myslíme posunutí, otočení, stejnohehlost případně stejnolehlost složenou s otočením.

7. Načrtněte množinu komplexních čísel

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : (2 + i)z + (2 - i)\overline{z} = 1\}$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} + (2 - 3i)z + (2 + 3i)\overline{z} + 4 = 0\}$

8. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

9. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

10. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

11. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ platí $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

12. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

13. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

14. Nalezněte rovnici obrazu přímky procházející body $z_1 = i$, $z_2 = -1 + 2i$ v kruhové inverzi se středem v počátku a poloměrem jedna. Zakreslete do komplexní roviny vzor (tj. zadanou přímku), její obraz i kružnici inverze.

15. Nalezněte rovnici obrazu kružnice o středu v bodě $z_0 = 3 + i$ a poloměru $r = \sqrt{5}$ v kruhové inverzi se středem v počátku a poloměrem jedna. Zakreslete do komplexní roviny vzor (tedy zadanou kružnici), její obraz i kružnici inverze.

16. Nalezněte rovnici obrazu kružnice o středu v bodě $z_0 = 2 + i$ a poloměru $r = \sqrt{5}$ v kruhové inverzi se středem v počátku a poloměrem jedna. Zakreslete do komplexní roviny vzor (tedy zadanou kružnici), její obraz i kružnici inverze.

17. Vypočtěte dvojpoměr bodů $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = 1 + i$ a z jeho hodnoty zjistěte, zda uvedené body leží na společné kružnici.

18. Ukažte, že zobrazení $z \mapsto 1/z$ zachovává dvojpoměr čtveřice nenulových bodů.

19. Zjistěte, zda funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky

    (a) $f : z \mapsto \exp(z^2)$

    (b) $f : z \mapsto z \exp(z)$

(c) $f : z \mapsto \sin(z)$

20. Vypočtěte poloměr konvergence mocninných řad. Kruhy konvergence mocninných řad zakreslete do komplexní roviny.

    (a) $\sum \frac{k^2+k+1}{2^k}(z-2)^{2k}$

    (b) $\sum \frac{(k!)^2 3^k}{(2k)! 4^k}(z+1)^k$

21. Vypočtěte kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

    (a) $\sin(z) = 3$

    (b) $\cos(z) = 2i$

    (c) $\exp(2iz - 1) = 5$

22. Sečtěte řadu a určete její kruh konvergence. Vypočtěte derivaci $f'(z)$ a vyjádřete ji ve tvaru mocninné řady se středem v nule.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

23. Napište Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě jedna a určete její poloměr konvergence.

$$f(z) = \frac{2}{z+2}$$

Návod: napište $f(z)$ ve tvaru součtu geometrické řady $f(z) = 2/(z+2) = 2/(3 + (z-1)) = (2/3)/(1 - (-(z-1)/3))$. Obecně viz [JV-K], příklad 2.3.9.