Eulerův vztah

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (\text{platí i pro } \varphi \in \mathbb{C})$$

$$e^{z} = e^{x+iy} \overset{?}{=} e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y$$

$$f_1(x,y) = e^{x}\cos y$$

$$f_2(x,y) = e^{x}\sin y$$

C-R

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{x}\cos y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -e^{x}\sin y \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^{x}\sin y$$

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = e^{x}\cos y - e^{x}\cos y = 0$$

$$\Delta f_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = e^{x}\sin y - e^{x}\sin y = 0$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = ?$$

Taylorova řada v reálném oboru:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^{k}$$

$f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{k}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

$$T(x) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6$$

$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$$T(x) = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5$$

Tyto tři řady konvergují pro $x \in \mathbb{R}$

a platí $f(x) = T(x)$

$x \in \mathbb{R} \to z \in \mathbb{C}$ .. potřebujeme – aritmetické operace s komplexními čísly OK

– limitu posloupnosti částečných součtů (podobné jako u limity funkce – viz derivace)

$e^{i\varphi}$ definujeme jako $T(i\varphi) = 1 + i\varphi + \frac{1}{2}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 +$

$$+ \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \frac{1}{5!}(i\varphi)^5 + \frac{1}{6!}(i\varphi)^6 + \dots =$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{3!}i\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{5!}i\varphi^5 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots\right)}_{\sin\varphi}$$

Definice:

Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots -$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots -$$

(pomocí Taylorovy řady)

Z této definice a z výše uvedených výpočtů

plyne $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$