$$\exp(z_1+z_2) \overset{?}{=} \exp(z_1)\cdot\exp(z_2) \quad \text{pro } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\exp(2z) \overset{?}{=} \left(\exp(z)\right)^2 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

ano, platí

jak to dokážeme?

1) hrubou silou

$$\exp(2z) = ?$$

$$2z = 2x + 2iy$$

$$\exp(2z) = \exp(2x+2iy) \overset{?}{=} \exp(2x)\cdot(\cos 2y + i \sin 2y)$$

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$$

$$\exp(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(2z)^k$$

$$(\exp(z))^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l;\, k+l=n} \frac{1}{k!\,l!} z^n =$$

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)$$

$$1 \cdot 1 \qquad 1 \cdot z \qquad 1 \cdot \frac{z^2}{2!} \qquad 1 \cdot \frac{z^3}{3!} \qquad \dots$$

$$z \cdot 1 \qquad z \cdot z \qquad z \cdot \frac{z^2}{2!}$$

$$\frac{z^2}{2!} \cdot 1 \qquad \frac{z^2}{2!} z$$

$$\frac{z^3}{3!} \cdot 1$$

$$\boxed{a_0 = 1} \qquad \boxed{a_1 = 2} \qquad \boxed{a_2 = \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = 2} \qquad \boxed{a_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1+3+3+1}{6} = \frac{8}{6}} \; \frac{z^3}{3!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{l!} \qquad a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{z}\ 1}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1}{n!} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$= \frac{2^n}{n!}$$

$$1 \cdot \frac{z^4}{4!}$$

$$z \cdot \frac{z^3}{3!}$$

$$\frac{z^2}{2!} \cdot \frac{z^2}{2!}$$

$$\frac{z^3}{3!} \cdot z$$

$$\frac{z^4}{4!} \cdot 1$$

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} =$$

$n=4$

$$= \frac{1 + 4 + 6 + 4 + 1}{4!} = \frac{16}{4!} = \frac{2^4}{4!}$$

1 — 1

1 1 — 2

1 2 1 — 4

1 3 3 1 — 8

1 4 6 4 1 — 16

1 5 10 10 5 1 — 32

1 6 15 20 15 6 1 — 32 + 32

$2^n = (1+1)^n =$ binomická věta $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ počet ~~způsobů~~ k-tic z n prvků

$\sum \binom{n}{k}$ počet podmnožin z n prvků $= 2^n$

2) věta J.9.8 $\quad G = \mathbb{C}$

$f(z) = \exp(2z) - (\exp(z))^2$

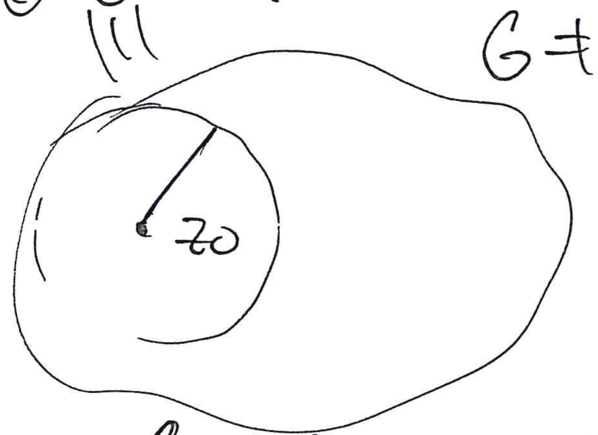
$f'(z)$ existuje $\quad = 2\exp(2z) - 2(\exp(z))\cdot(\exp(z))$

$z_0 = 0$

$d = \operatorname{dist}(z_0, \underbrace{\mathbb{C}\setminus\mathbb{C}}) = +\infty$

$\mathbb{C}\setminus G \qquad \emptyset$

$G \neq \mathbb{C}$



z věty plyne: f lze vyjádřit jako součet mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ na $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Cíl: dokázat tvrzení o kořenech součtu mocninné řady – pokud jsou všechna $x \in \mathbb{R}$ kořeny, pak jsou i všechna $z \in \mathbb{C}$ kořeny

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\right) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{C})\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0\right)}$$

(D.Ú – zopakujte si, co je hromadný bod v metrickém prostoru)

Důkaz implikace

buď $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$

nebo $k =$ nejmenší n, že $a_n \neq 0$ .. $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = z^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k}$$

MŘ

$z = 0$

$z \in \mathbb{R}$ je $z^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k} = 0$

$= g(z)$

součet je spojitá funkce

$g(0) = a_n \neq 0$

DOKONČÍME PŘÍŠTĚ