Základní věta algebry

Polynom stupně alespoň 1 má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Důkaz:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

funkce: $z \mapsto |P(z)|$

1) ukážeme, že nabývá v $\mathbb{C}$ minima, tj

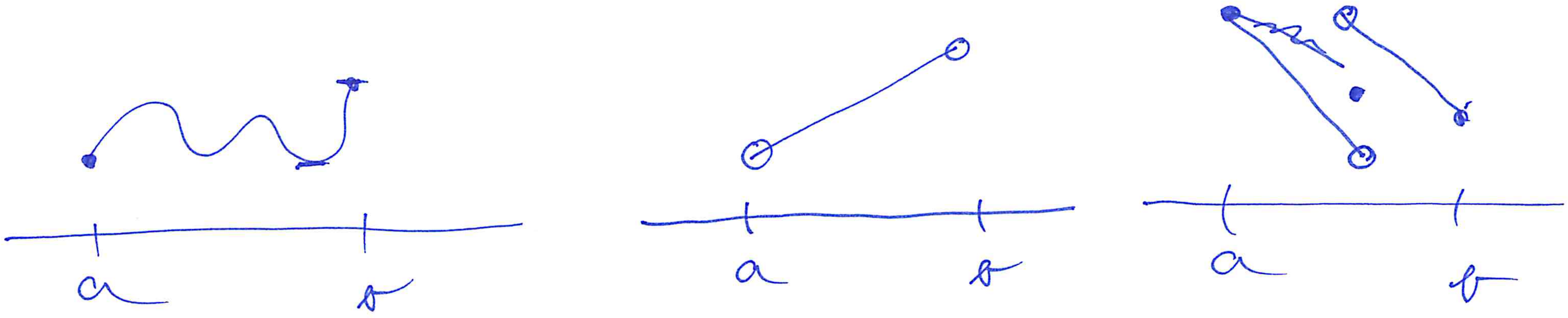
$$(\exists z_0 \in \mathbb{C})(\forall z \in \mathbb{C})(|P(z_0)| \leq |P(z)|)$$

2) sporem ukážeme, že nemůže být $|P(z_0)| > 0$. najdeme z takové, že $|P(z)| < |P(z_0)|$

Odtud plyne $|P(z_0)| = 0$, tedy $P(z_0) = 0$

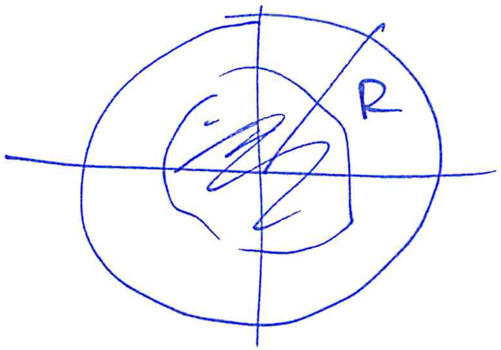
ad 1) $z \mapsto |P(z)|$ je spojitá na $\mathbb{C}$

1D Weierstrassova věta: Funkce spojitá na $[a,b]$ je nabývá na $[a,b]$ extrémy.

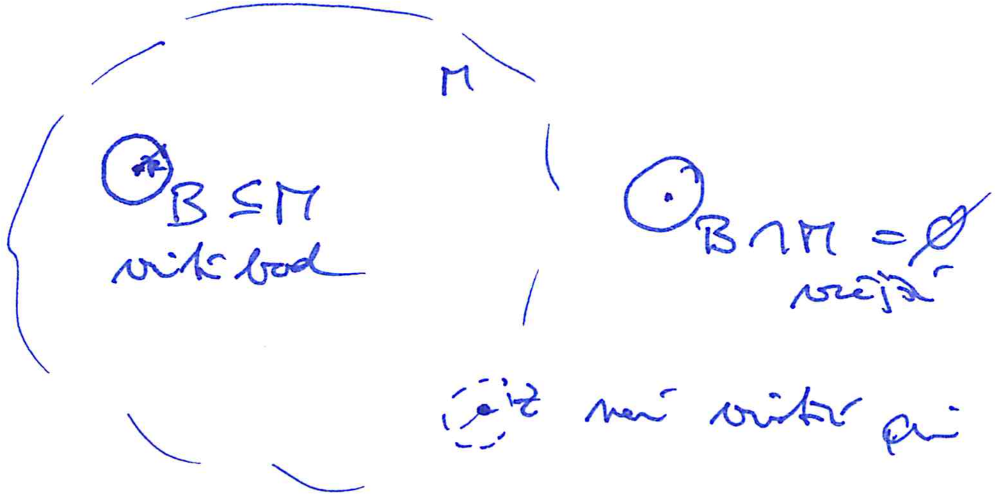


2D varianta $\mathbb{C}$: Funkce spojitá na uzavřené omezené (v 2D ... kompaktní) množině M nabývá na M extrémy.

omezená: $(\exists R)(M \subseteq$ kruh $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$



uzavřená:



už není vnitř. ani vnější, tak je hraniční

Otevřená množina: všechny ~~body~~ $z \in M$ jsou vnitřní

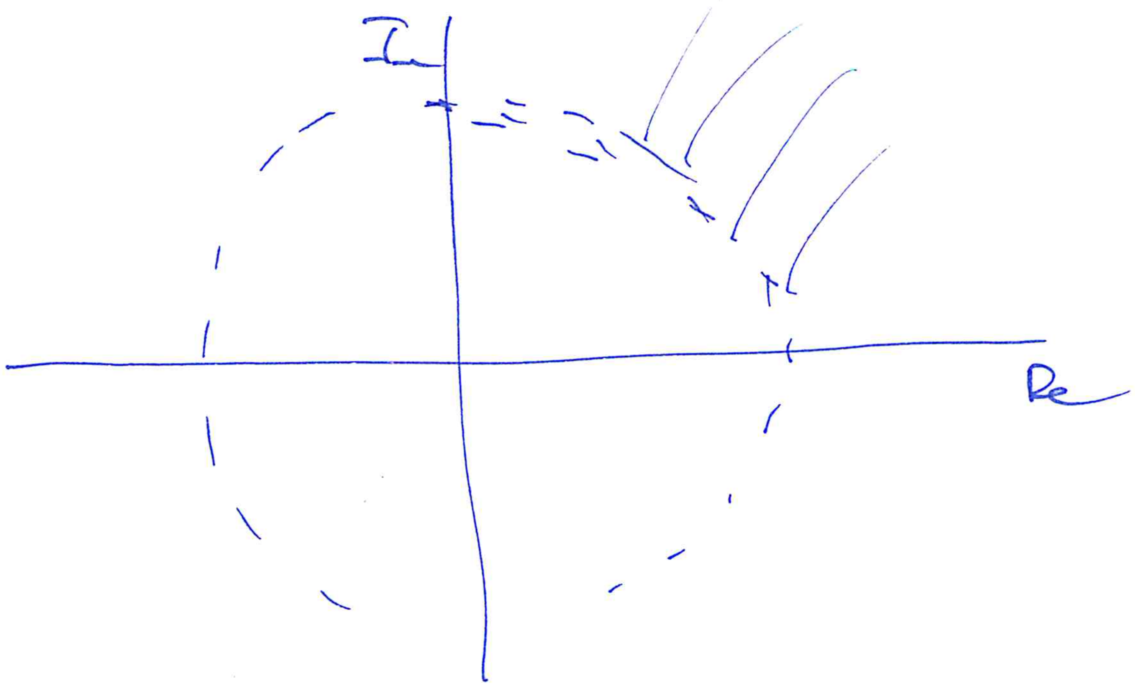
uzavřená: $\mathbb{C} \setminus M$ je otevřená

$\mathbb{C}$ není omezená množina!

limita $|P(z)|$ pro $z \to \infty$ je rovna ~~nule~~ ∞

k jejíž definici potřebujeme okolí ∞: $U_R(\infty) = P_R(\infty)$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| > R \}$$



$$|P(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots + a_0| =$$

$a_n \neq 0$

$$= |a_n z^n| \cdot \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|}_{\to 1}$$

$|a_n| \cdot |z|^n$

$\to +\infty$

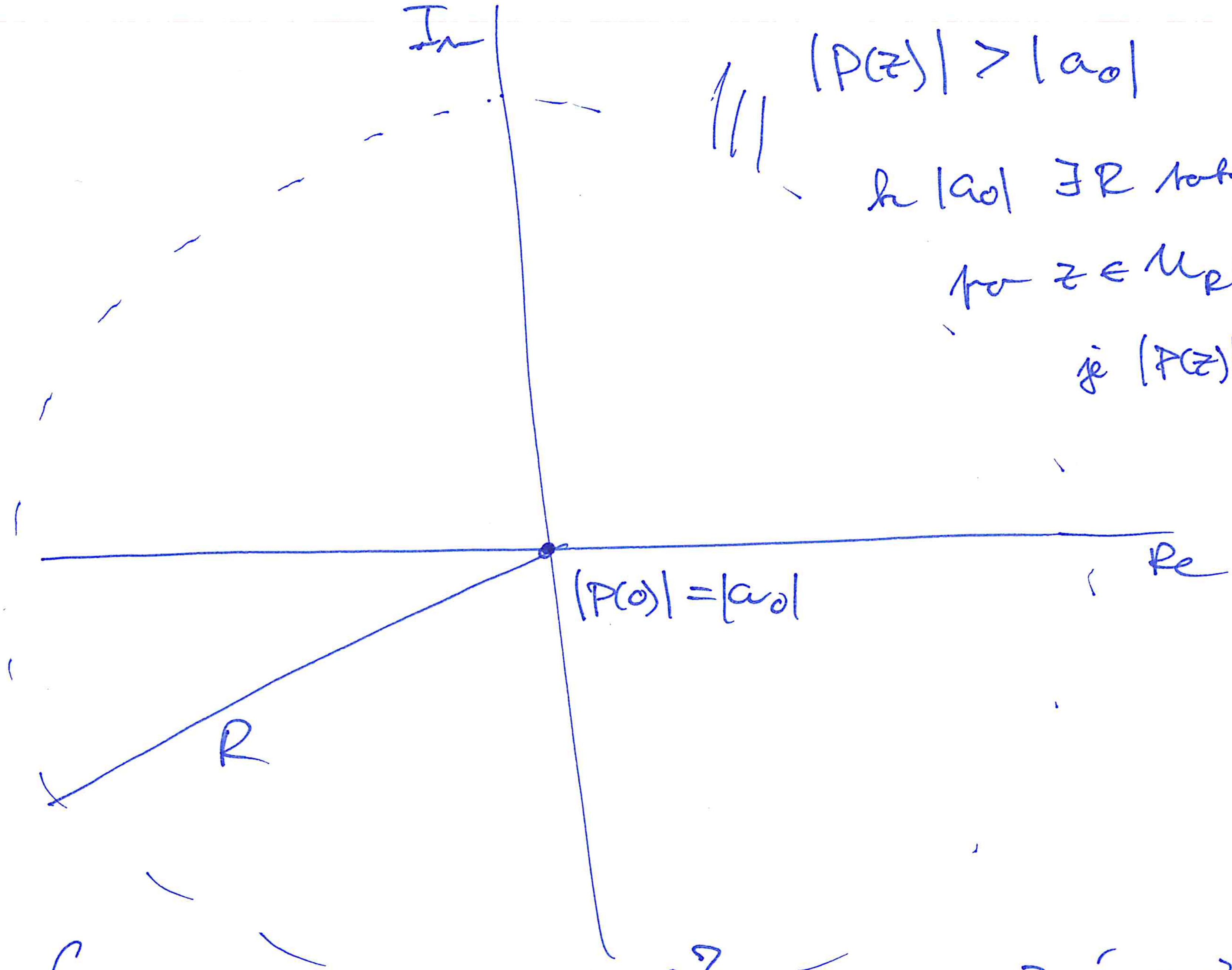
$$\lim_{z \to \infty} |P(z)| = +\infty$$

$$|P(z)| > |a_0|$$

k $|a_0|$ $\exists R$ takové, že

pro $z \in U_R(\infty)$

je $|P(z)| > |a_0|$



$M = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$ je uzavřená omezená

Dle Weierstrassovy věty nabývá $z \mapsto |P(z)|$ na M

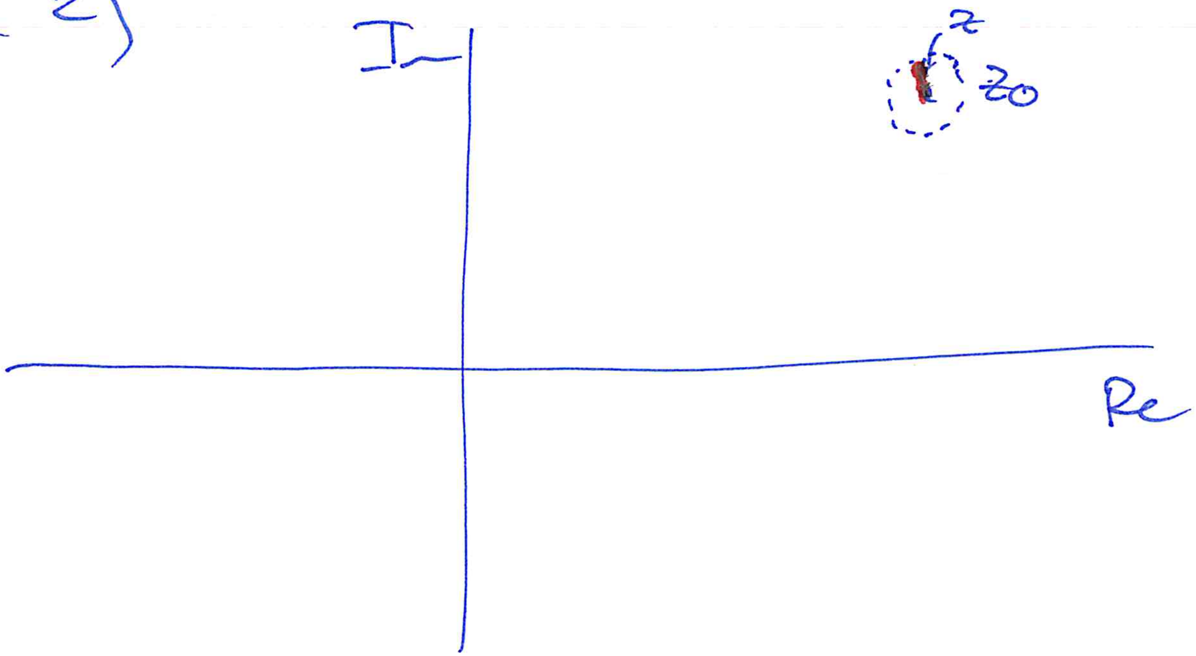
minimální hodnoty, tj. $(\exists z_0 \in M)(\forall z \in M)(|P(z)| \geq |P(z_0)|)$

Z $|P(z)| > |a_0|$ na $\mathbb{C} \setminus M$ plyne, že $z \mapsto |P(z)|$

nabývá v z_0 minima na $\mathbb{C}$.

1) je hotova

ad 2)

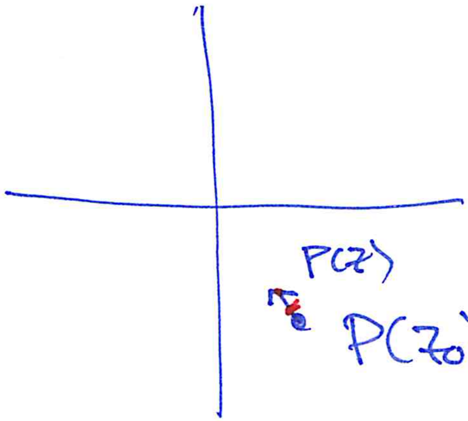


předpokládejme, že $|P(z_0)| > 0$

$$P(z) = b_n (z-z_0)^n + b_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + \dots + b_1(z-z_0) + b_0$$

$$b_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$$ ... vzorce pro výpočet koeficientů

$$b_n = a_n \neq 0$$



$P(z_0) \neq 0$ ... $|P(z)| < |P(z_0)|$ spor hledáme z takové, že $|P(z_1)| < |P(z_0)|$

$$|P(z_0)| = |b_0| \neq 0$$
$$>0$$

případ $b_1 \neq 0$

$$P(z) = P(z_0) + (z-z_0)\left(\underset{\neq 0}{b_1} + \cancel{b_2(z-z_0) + \dots b_n (z-z_0)^{n-1}}\right)$$

$$(z-z_0)^k b_{1_k} = -\frac{1}{2}P(z_0)$$

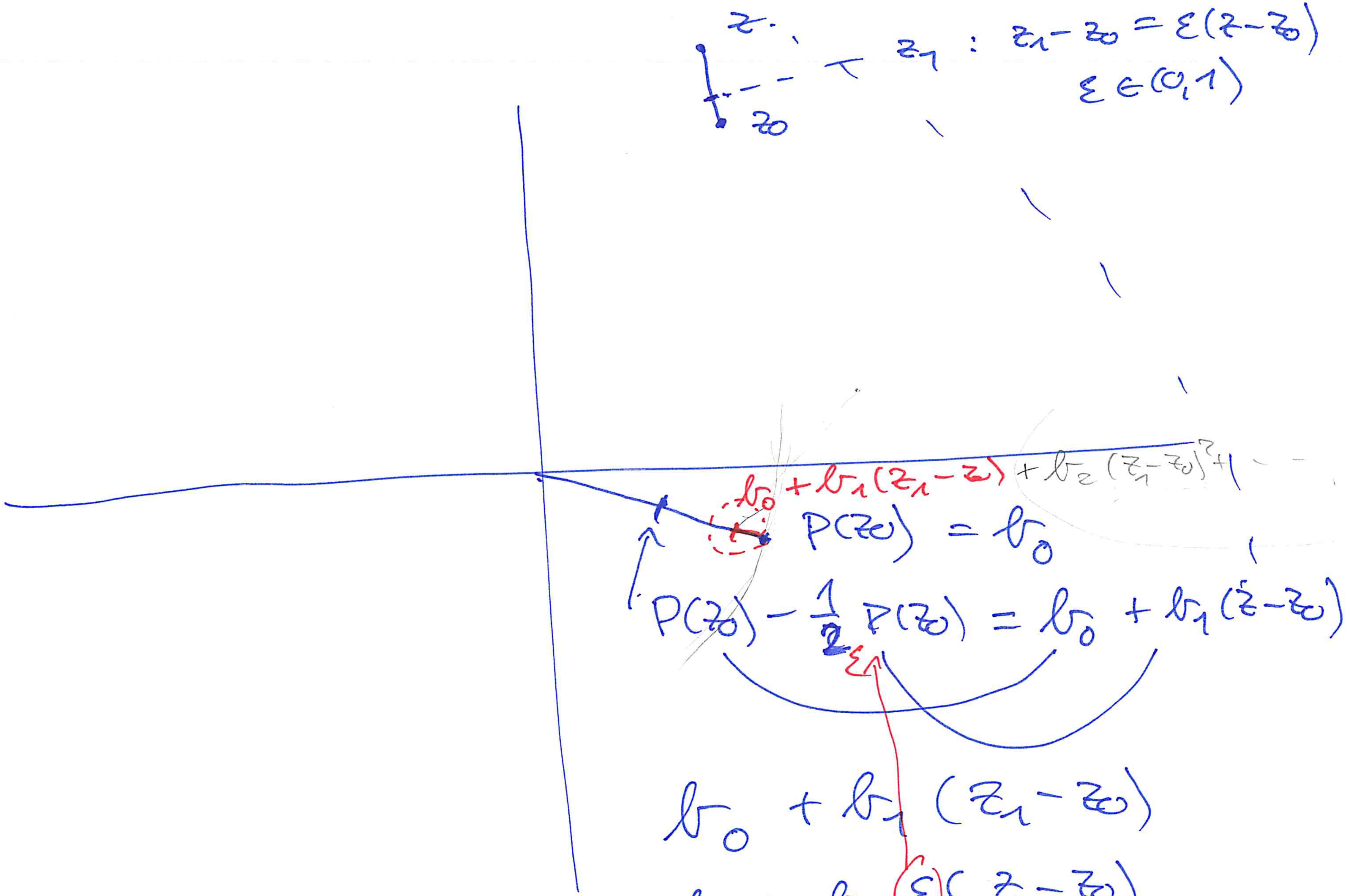
pak $\boxed{b_0 + b_1(z-z_0) = P(z_0) - \frac{1}{2}P(z_0) = \frac{1}{2}P(z_0)}$

co se členy $b_2(z-z_0)^2 + \dots + b_n(z-z_0)^n =$

$$= (z-z_0)^2\left[b_2 + \dots + b_n (z-z_0)^{n-2}\right]$$

$\Delta z = z - z_0$

$\varepsilon \Delta z = z_1 - z_0$



z, z_0 $\to$ z_1 : $z_1 - z_0 = \varepsilon(z - z_0)$

$\varepsilon \in (0,1)$

$b_0 + b_1(z_1 - z_0) + b_2(z_1 - z_0)^2 + \dots$

$P(z_0) = b_0$

$P(z_0) - \frac{1}{2} P(z_0) = b_0 + b_1(z - z_0)$

ε

$b_0 + b_1(z_1 - z_0)$

$b_0 + b_1 \varepsilon (z - z_0)$