ANALYTICKÁ FUNKCE (v $\mathbb{C}$, v $\mathbb{R}$)

Definice:

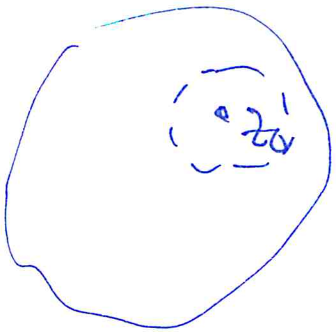
Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a funkce ~~f má na M deriv~~ $f: M \to \mathbb{C}$ má na M derivace všech řádů a pro všechna $z_0 \in M$ platí:

poloměr R / konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

je kladný a pro $z \in M \cap B_R(z_0)$ (tedy $|z-z_0|<R$)

je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

M



Pak f nazveme analytickou funkcí na množině M.

Příklady:

1) Polynomy jsou analytické funkce na $\mathbb{C}$

2) exp je — " —

3) sin, cos — " —

4) $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ je — " — na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Víme:

K tomu, aby byla f analytická na M

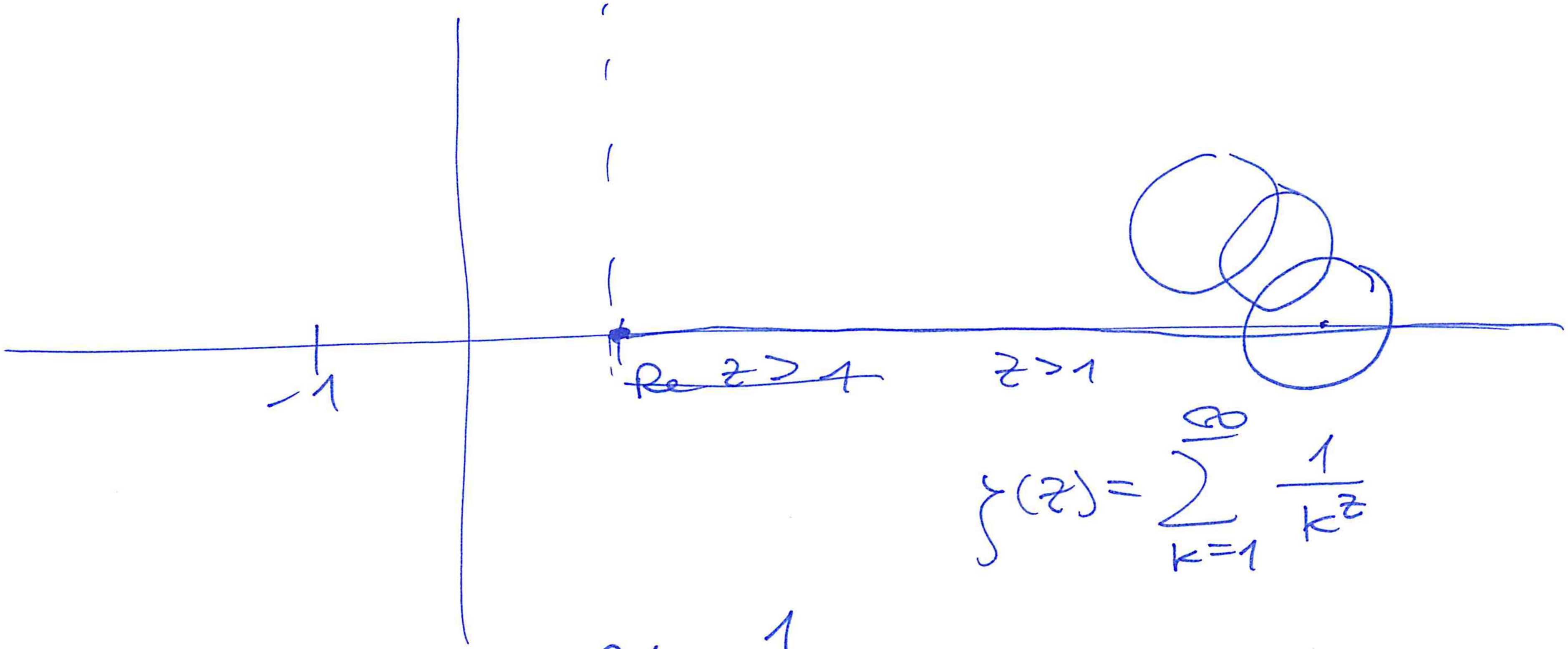
stačí existence 1. derivace,

tedy aby byla f holomorfní na M

analytičnost v $\mathbb{R}$:

stejné, $M = (a, b)$ – otevřený interval

Riemann funkce



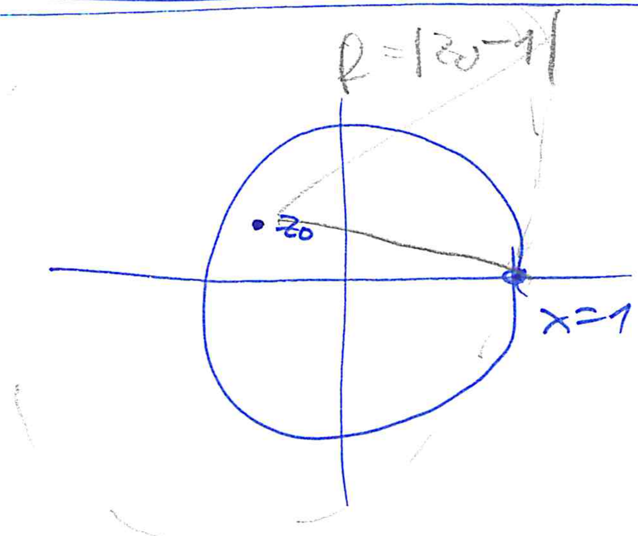
$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$$

$$1+2+3+\dots \approx -\frac{1}{12}$$

$$1+x+x^2+\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$|x|<1$



$$z^5 - z^4 - z + 1 = 0$$

$$(z^4 - 1)(z - 1)$$

$$(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)^2 = 0$$

T. p. 1. řádu:

$$\boxed{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)} + \ldots$$

$= 0$

$z^k = 1$