Písemná část zkoušky z předmětu UKPE/UKPM
1. října 2020

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Pečlivě čtěte zadání. Vypočtěte a zobrazte je něco jiného než zobrazte (v tom případě máte v průběhu výpočtu odmocňovat „nehezké" číslo a není nutné počítat jeho argument, stačí ho zakreslit). Zkonstruujte pomocí pravítka a kružítka znamená, že ke konstrukci nepoužijete výpočty. Ve všech případech by mělo být z vaší práce zřejmé, jak jste postupovali.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně" zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 70%.

1. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

1a Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

1b Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

1c Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

1d Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ platí $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

1e Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1f Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Vypočtěte kořeny rovnic v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.
   (a) $(z+2)^3 = -i$
   (b) $z^2 + iz = 2$

3. Zobrazte v komplexní rovině kořeny rovnice

$$z^2 + (1-2i)z - 2 = 0$$

3a

$$z^2 + iz - 2 + i = 0$$

4. Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+3i$. Poté zkonstruujte obraz jejich podílu a porovnejte jeho polohu s vypočtenou hodnotou.

5. Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ a číslo $z = z_1/(z_1 + z_2)$. Číslo z zobrazte dvěma způsoby: konstrukcí z obrazů čísel z_1, z_2 a výpočtem. Oba výsledky porovnejte.

6. Vypočtěte poměr bodů $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 1 + 2i$ a z tohoto poměru vypočtěte velikost úhlu s vrcholem v bodě z_1 a s rameny procházejícími body z_2, z_3. Body poté zobrazte v komplexní rovině a vypočtený úhel porovnejte s obrázkem.

7. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $z_1 = 2$ na bod $w_1 = 2 + 2i$ a bod $z_2 = -1 + i$ na bod $w_2 = 3i$. Vypočtěte koeficient tohoto podobného zobrazení. Typem podobného zobrazení myslíme posunutí, otočení, stejnohehlost případně stejnolehlost složenou s otočením.

8. Načrtněte množinu komplexních čísel
   (a) $\{z \in \mathbb{C} : (2 + i)z + (2 - i)\overline{z} = 1\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} + (2 - 3i)z + (2 + 3i)\overline{z} + 4 = 0\}$

9. Zjistěte, zda funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky $f : z \mapsto \exp(z^2)$

9a $f : z \mapsto z\exp(z)$

9b $f : z \mapsto \sin(z)$

10. Vypočtěte poloměr konvergence mocninných řad. Kruhy konvergence mocninných řad zakreslete do komplexní roviny.

$$\sum \frac{k^2 + k + 1}{2^k}(z - 2)^{2k}$$

10a

$$\sum \frac{(k!)^2 3^k}{(2k)!4^k}(z + 1)^k$$

11. Vypočtěte kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

$$\sin(z) = 3$$

11a

$$\cos(z) = 2i$$

11b

$$\exp(2iz - 1) = 5$$

12. Sečtěte řadu a určete její kruh konvergence. Vypočtěte derivaci $f'(z)$ a vyjádřete ji ve tvaru mocninné řady.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2} \right)^k$$

13. Napište Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě jedna a určete její poloměr konvergence.

$$f(z) = \frac{2}{z+2}$$

13a

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 3z}$$