Vysvětlete význam dvou slov *komplexní* v termínu: komplexní funkce komplexní proměnné. Uveďte příklad reálné funkce komplexní proměnné a komplexní funkce reálné proměnné.

Čím se liší funkce reálné a komplexní proměnné:

1. Funkce $x \mapsto |x|$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, ale v bodě 0 nemá derivaci.
2. Funkce $x \mapsto x|x|, x \in \mathbb{R}$ má na $\mathbb{R}$ první derivaci, ale v bodě 0 nemá druhou derivaci.
3. Funkce
$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp \frac{1}{x^2-1} & x \in (-1,1) \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases}$$
je spojitá na $\mathbb{R}$, má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů, v bodech 1 a -1 jsou všechny tyto derivace nulové, tedy i Taylorova řada v těchto bodech je nulová, ale její součet není roven funkci f.

Pro funkci f komplexní proměnné definovanou na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní (my jsme během semestru stihli ukázat je implikaci $2 \Rightarrow 1$):

1. f má na množině G derivaci
2. Ke každému $z_0 \in G$ existuje konvergentní mocninná řada $\sum a_k(z-z_0)^k$ a okolí $\mathcal{U}(z_0)$ takové, že f je na $\mathcal{U}(z_0)$ rovna $\sum a_k(z-z_0)^k$.
3. K funkci f existuje lokálně na množině G primitivní funkce F. Tj. ke každému $z \in G$ existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ a funkce F taková, že na $\mathcal{U}(z)$ platí $F' = f$.

Studijní literatura: Brzezina, Veselý: Úvod do komplexní analýzy

Z kapitoly 1 především:
zavedení komplexních čísel jako dvojic reálných čísel s operacemi násobení a sčítání; zobrazování komplexních čísel v rovině (Gaussova rovina); absolutní hodnota, číslo komplexně sdružené, trojúhelníková nerovnost, algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla, argument

komplexního čísla.
Izometrická izomorfie prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$, konvergence posloupností a řad komplexních čísel, absolutní a neabsolutní konvergence.
Sféra: $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; stereografická projekce, odvození vztahů.
Limita komplexní funkce komplexní proměnné, definice, věta 1.3.2 (o limitách a aritmetických operacích).
Derivace funkce komplexní proměnné – vše z odstavce 1.4.

O lineárně lomené funkci především:
Definice 4.3.1, poznámka 4.3.3, poznámka 4.3.4; definice kruhové inverze, odvození, že $z \mapsto 1/\bar{z}$ je kruhová inverze vzhledem ke kružnici se středem v počátku a s jednotkovým poloměrem, $z \mapsto z_0 + r^2/\overline{z - z_0}$ je kruhová inverze vzhledem ke kružnici se středem v bodě z_0 a s poloměrem r.
Definice zobecněné kružnice (4.3.11), poznámka 4.3.12, lemma 4.3.13 (o obrazu zobecněné kružnice v zobrazení $z \mapsto 1/z$ a obdobný důsledek pro lineárně lomenou funkci (použijeme poznámku 4.3.3).
Poměr bodů z_1, z_2, z_3: $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$, geometrický význam. Příklad do písemky: v Gaussově rovině jsou zadány body a, b, c a (kvůli měřítku) body $1, i$; vyznačte poměr $(a-b)/(b-c)$.
Dvojpoměr bodů $z_1, \ldots, z_4$, definice 4.3.21. Příklad do písemky: v Gaussově rovině jsou zadány body a, b, c, d a (kvůli měřítku) body $1, i$; vyznačte dvojpoměr $[a, b, c, d]$. Dokažte geometrickými prostředky důsledek 4.3.25. Příklad do písemky: zjistěte, zda zadané 4 body leží na přímce a zda leží na kružnici.
Ukažte výpočtem, že lineárně lomená funkce zachovává dvojpoměr bodů (tj. že platí lemma 4.3.24).
Invariantní body (definice 4.2.5), počet invariantních bodů lineárně lomené funkce (horní půlka strany 70). Věta 4.3.15 jako důsledek počtu invariantních bodů.
Příklad do písemky: pro zadané dvojice bodů $z_1, w_1, \ldots, z_3, w_3$ nalezněte lineárně lomenou funkci, která zobrazuje bod z_i na bod w_i; nalezněte lineárně lomenou funkci, která zadanou kružnici zobrazí na zadanou přímku.

O mocninných řadách především:
Článek 2.2 vše kromě 2.2.8–9.
Z 2.3: poznámka 2.3.2, definice 2.3.3, lemma 2.3.4 (i s důkazem, který jsme dělali na přednášce a liší se od důkazu v textu), věta 2.3.5 i s důkazem, přitom lze vynechat použití stejnoměrné konvergence a nahradit jej m-testem.
Důsledek 2.3.7–8, příklad 2.3.9 (příklad do písemky).

Věta 2.4.1 i s důkazem, poznámka 2.4.2, lemma o nulových bodech mocninné řady (množina nulových bodů má jen vnitřní a izolované body), důsledek lemmatu: nenulová mocninná řada má pouze izolované nulové body (na přednášce ke konci semestru).

Exponenciální a goniometriké funkce – definice pomocí Taylorovy řady (tedy pro goniometrické funkce jinak, než v textu); Eulerův vztah (pro $t \in \mathbb{R}$ platí $\exp(it) = \cos t + i \sin t$) a jeho odvození, věta 4.4.3 a jako důsledek vztah $\exp(x + iy) = \exp x(\cos y + i \sin y)$, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla.
Hyperbolické funkce a jejich vztah k exponenciální a goniometrickým funkcím.
Periodicita a obor hodnot exponenciální funkce, logaritmus jako inverzní funkce, hlavní hodnota logaritmu (log) a logaritmus jako vícehodnotová funkce (Log). Argument nenulového komplexního čísla (arg, Arg).
Příklady do písemky: řešení rovnice s koplexní proměnnou, početně např. $\exp z = 1 - 3i$, $\cos z = -3i$, $\sin z = 4$, graficky např. $\cos z = 2 - i$.

Derivace funkce komplexní proměnné:
Cauchy-Riemannovy podmínky: články 3.2, 3.3. Příklad do písemky: zjistěte, zda zadaná funkce splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky.

Konformní zobrazení:
Úhel křivek jako úhel jejich tečen. Funkce (zobrazení), která má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ nenulovou derivaci, zachovává úhel křivek, které se v bodě z_0 protínají. Důkaz obrázkem.