Lineární zobrazení v komplexním oboru
20. prosince 2022

Cílem textu je ukázat vztah lineárních zobrazení v komplexním oboru k podobným zobrazením v Gaussově rovině. Začneme zopakováním definice lineárního zobrazení a ukážeme, že každé lineární zobrazení popisuje podobné zobrazení v Gaussově rovině. V druhé části textu ukážeme opačnou implikaci, tedy, že každé podobné zobrazení v Gaussově rovině zachovávající pravotočivou orientaci je možné popsat pomocí lineárního zobrazení.

Definice. Ve shodě se standardní definicí budeme pod lineárním zobrazením rozumět zobrazení

$$z \mapsto az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

Invariantní bod. Bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. vzor splývá se svým obrazem, nazveme invariantním bodem. V geometrii takové body zpravidla nazýváme samodružnými.

Úkol. Připomeňte si samodružné body těchto zobrazení: otočení, stejnolehlosti, posunutí. Je to střed otáčení, střed stejnolehlosti, posunutí o nenulový vektor nemá žádný samodružný bod.

Úkol. Rozmyslete si, kolik má zobrazení (1) invariantních bodů v závislosti na hodnotách a, b. Uvědomte si, že invariantní bod je kořenem rovnice

$$az_0 + b = z_0 \tag{2}$$

a ta má pro $a \neq 1$ jeden kořen, pro $a = 1$ buď nekonečně mnoho nebo žádný kořen.

Stručný přehled lineárních zobrazení.
Nejdřív rozebereme případ $a = 1$:

1. $a = 1$, $b = 0$: dosazením do (1) dostaneme $z \mapsto z$. Toto zobrazení popisuje identitu.
2. $a = 1$, $b \neq 0$: dosazením do (1) dostaneme $z \mapsto z + b$. Toto zobrazení popisuje posunutí o vektor $0b$.

Zbývá probrat případ $a \neq 1$. Z předchozího víme, že zobrazení (1) má v tomto případě jeden invariantní bod. To napovídá, že by toto lineární zobrazení mohlo popisovat otočení a stejnolehlost v Gaussově rovině. Uvidíme, že kromě těchto dvou zobrazení popisuje i jejich složení.
Obraz bodu $z \in \mathbb{C}$ označíme w a invariantní bod označíme z_0. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} w &= az + b \\ z_0 &= az_0 + b \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic vyloučíme b. Místo něj se v rovnici objeví z_0.

$$w - z_0 = a(z - z_0) \tag{3}$$

Dalšími úpravami lze dostat

$$w = z_0 + a(z - z_0) \quad \text{případně} \quad w = az + z_0 - az_0.$$

Ke klasifikaci zobrazení použijeme tvar (3).

Úkol. Zopakujte si geometrický význam násobení komplexních čísel, tyto znalosti pak použijte k rozboru vztahu (3).

3. $|a| = 1$, $a \neq 1$: Lineární zobrazení popisuje otočení o úhel $\varphi = \arg a$ okolo bodu z_0, v případě $\varphi > 0$ v kladném směru (proti směru hodinových ručiček), v případě $\varphi < 0$ v záporném směru (po směru hodinových ručiček)

4. $\arg a = 0$ (tj. $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$): Lineární zobrazení popisuje stejnolehlost s koeficientem a a středem z_0

5. Obecný případ je složení otočení o úhel $\varphi = \arg a$ a stejnolehlosti s koeficientem $|a|$, obojí se středem v invariantním bodu z_0.

Závěr. Ukázali jsme, že lineární zobrazení popisuje v Gaussově rovině některé z podobných zobrazení: posunutí, identitu, otočení, stejnolehlost, zobrazení složené z otočení a stejnolehlosti se stejným středem. Zároveň jsme rozebrali, jak typ zobrazení souvisí s koeficienty lineárního zobrazení.

Příklady.
Otočení o úhel φ v kladném směru se středem v bodě z_0 lze popsat pomocí lineárního zobrazení

$$f(z) = z_0 + (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(z - z_0),$$

pokud toto otočení složíme se stejnolehlostí s koeficientem k, dostaneme popis

$$f(z) = z_0 + k(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(z - z_0),$$

samotnou stejnolehlost popíšeme

$$f(z) = z_0 + k(z - z_0),$$

otočení v záporném směru popíšeme

$$f(z) = z_0 + (\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))(z - z_0).$$

Všechna výše uvedená zobrazení zachovávají pravotočivou orientaci. Příkladem zobrazení, které mění tuto orientaci, je osová symetrie. Symetrii okolo reálné osy popisuje zobrazení

$$f(z) = \overline{z}$$

Opačný problém. V dalším se zaměříme na rozbor opačného problému: máme zadané podobné zobrazení v Gaussově rovině a hledáme lineární zobrazení, které ho popisuje. Začneme připomenutím, co je podobné zobrazení.

Definice. Zobrazení bodů v rovině budeme nazývat *podobným zobrazením*, pokud existuje $k \in (0, +\infty)$ takové, že pro libovolnou dvojici bodů X_1, X_2 a jejich obrazy Y_1, Y_2 platí pro vzdálenosti $|X_1X_2|$, $|Y_1Y_2|$

$$|Y_1Y_2| = k|X_1X_2|$$

Číslo k nazýváme *koeficientem podobného zobrazení.*

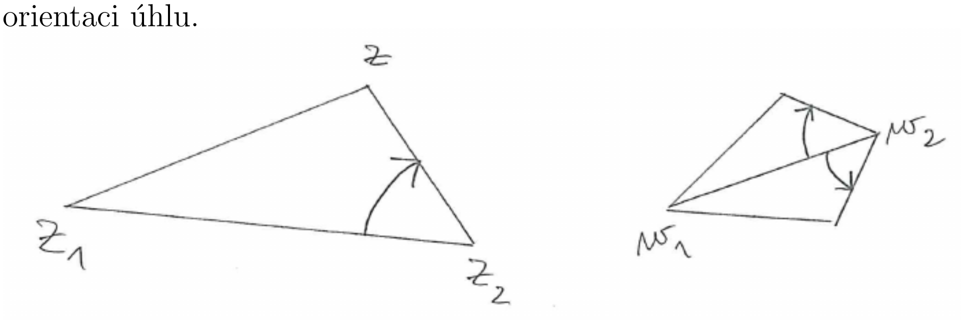
Úkol. Zopakujte si vlastnosti podobných zobrazení: zobrazuje přímku na přímku, zachovává pořadí bodů na přímce, zachovává úhel přímek, trojúhelník o vrcholech ABC zobrazuje na trojúhelník $A'B'C'$, který je s ΔABC podobný.

Cíl. Ukážeme, že pro libovolnou čtveřici $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, $w_1 \neq w_2$ existuje právě jedno podobné zobrazení, které

1. zobrazuje bod z_1 na bod w_1,
2. bod z_2 na bod w_2,
3. zachovává pravotočivou orientaci

a toto zobrazení lze popsat lineárním zobrazením.

Na obrázku vlevo jsou znázorněny body z_1, z_2 doplněné bodem z na trojúhelník, u vrcholu z_2 je vyznačena orientace úhlu. Vpravo jsou obrazy w_1, w_2 doplněné dvěma způsoby na trojúhelník podobný s trojúhelníkem z_1z_1z. Přitom pouze horní trojúhelník zachovává orientaci úhlu.



Úkol. Rozmyslete si, že více způsoby nelze doplnit úsečku w_1w_2 lze na trojúhelník podobný s trojúhelníkem z_1z_2z. Odtud pak plyne, že podobné zobrazení mající vlastnosti 1. – 3. popsané výše existuje právě jedno.

Zbývá ukázat, že je možné toto zobrazení popsat pomocí lineárního zobrazení a také ukázat, jak.

Úkol. Rozmyslete si, že podobnost trojúhelníků je relace, která je ekvivalencí a že jednotlivé třídy ekvivalence lze charakterizovat komplexním číslem

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \tag{4}$$

Návod: Zopakujte si geometrický význam rozdílu a podílu komplexních čísel a uvědomte si, že argument čísla (4) je roven úhlu ve vrcholu v bodě z_2, znaménko argumentu popisuje, jestli se od ramene z_1z_2 k rameni zz_2 dostaneme po, nebo proti směru hodinových ručiček, absolutní hodnota poměru (4) je rovna podílu velikostí stran trojúhelníku.

Poměr bodů. Předchozí úvahy nás vedou k definici:
Poměrem navzájem různých bodů z_1, z_2, z_3 v komplexní rovině budeme rozumět podíl

$$\text{pomer}(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \tag{5}$$

Úkol. Rozmyslete si, že z podobnosti trojúhelníků z_1z_2z, w_1w_2w plyne rovnost poměrů

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{6}$$

Úkol. Upravte (6) na

$$w = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) \tag{7}$$

Z předchozího plyne tvrzení:

Věta. Nechť $z_1 \neq z_2$ jsou komplexní čísla a w_1, w_2 jejich obrazy v podobném zobrazení. Nechť toto podobné zobrazení zachovává orientaci úhlů. Pak je toto zobrazení popsané lineární funkcí

$$f(z) = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1)$$

Důsledek. K dvojici vzorů s obrazy z_1, w_1, z_2, w_2 existuje právě jedno podobné zobrazení zachovávající pravotočivou orientaci. Typ tohoto zobrazení je dán podílem $(w_2 - w_1)/(z_2 - z_1)$.

Příklad. Pro dvojici vzorů a obrazů $f(1 + i) = 2$, $f(1 - i) = 3$ vypočteme podíl ze (7)

$$\frac{3 - 2}{1 - i - (1 + i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

Příslušné lineární zobrazení je tedy otočení o 90° složené se stejnolehlostí s koeficientem 1/2. Otočení a stejnolehlost mají společný střed. K jeho výpočtu nejdříve napíšeme zobrazení ve tvaru (7)

$$f(z) = 2 + \frac{i}{2}(z - 1 - i)$$

a z rovnice $f(z_0) = z_0$ vypočteme invariantní bod

$$2 + \frac{i}{2}(z_0 - 1 - i) = z_0$$

Invariantní bod vyjde $z_0 = 11/5 + 3i/5$.
Daná dvojice obrazů a vzorů určuje otočení okolo středu v bodě z_0 o 90° v kladném směru složené se stejnolehlostí s koeficientem 1/2 se stejným středem.