ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

Každý polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty

$a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, $a_n \neq 0$

má alespoň jeden komplexní kořen,

tj.

$$(\exists z_0 \in \mathbb{C})(P(z_0) = 0)$$

Hlavní myšlenka důkazu:

Budeme zkoumat obrazy kružnic

$$(K) \quad z_r(t) = r(\cos t + i \sin t), \; t \in [0, 2\pi]$$

tímto polynomem, tedy uzavřené křivky v rovině

$$(V) \quad w_r(t) = P(z_r(t)), \; t \in [0, 2\pi]$$

a ukážeme, že existuje $r_0 \in (0, +\infty)$ takové, že (V) prochází počátkem, tedy $w_{r_0}(t) = 0$ pro alespoň jedno $t \in [0, 2\pi]$

$z_0 = z_{r_0}(t) = r_0(\cos t + i \sin t)$ je pak kořen P

Pro jednodušší vyjadřování (zápis) budeme zkoumat polynom stupně $n=5$

$$P(z) = z^5 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_0 ,$$

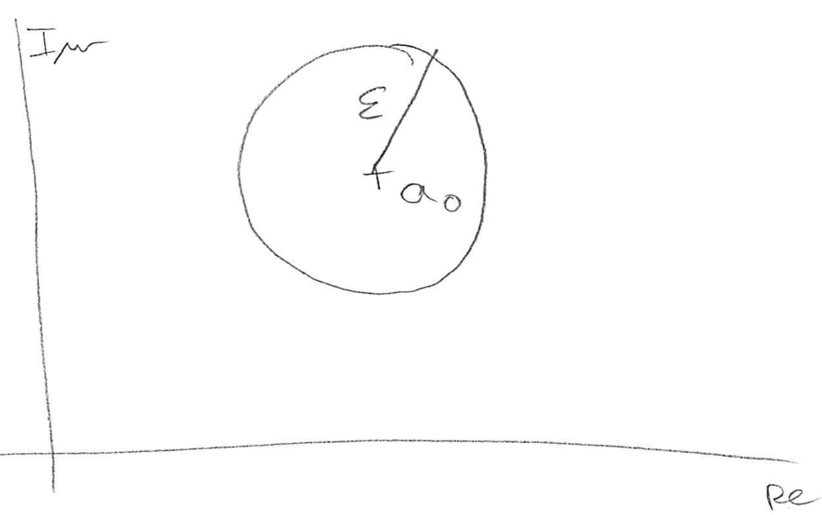
$a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ (jinak máme kořen $z_0 = 0$)

(U) pro malé hodnoty r

P je funkce spojitá v bodě $z_0 = 0$, proto k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $|z| < \delta$ je $|P(z) - P(0)| < \varepsilon$

Označme: $R_1 = \delta$

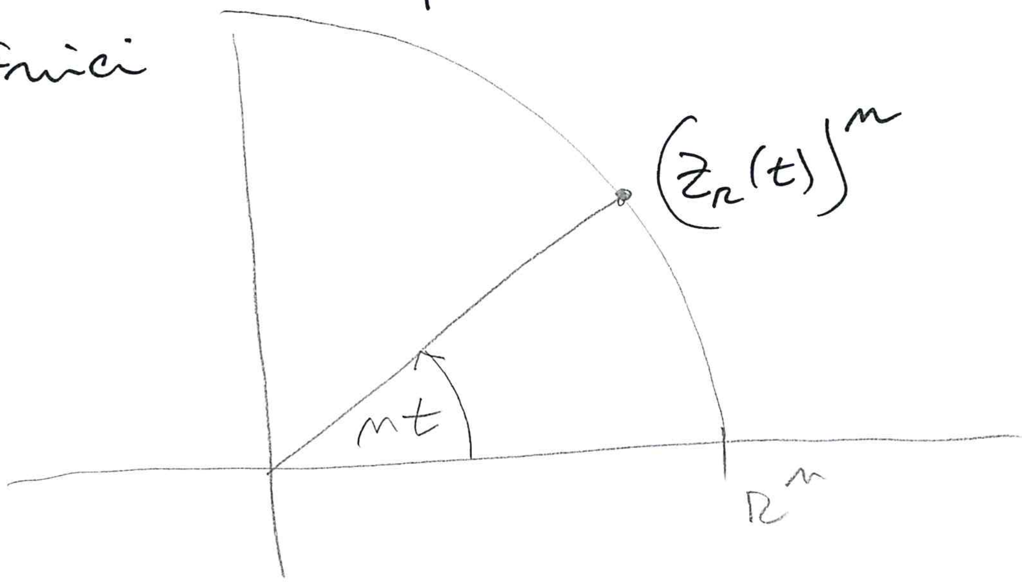
Pak pro $r < R_1$ je obraz (U) kružnice (K) v ε-okolí bodu $P(0) = a_0$



(V) pro velké hodnoty r

křivka
$$t \mapsto (z_r(t))^n$$

oběhne n-krát počátek po kružnici



Upravíme:

$$P(z) = z^5\left(1 + \frac{a_3}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \frac{a_0}{z^5}\right) \qquad (*)$$

Substitucí $Z = \frac{1}{z}$ převedeme výraz v závorce na

$$Q(Z) = 1 + a_3 Z^2 + a_2 Z^3 + a_0 Z^5$$

Stejnou argumentací, jako pro malé r dostaneme: ke $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

pro $|Z| < \delta$ je $|Q(Z) - Q(0)| < \varepsilon$

Převedeme Z, Q zpět na z, P:

$$|Z| = \left|\frac{1}{z}\right| < \delta \iff |z| > \frac{1}{\delta}$$

v dalším označíme

$$R_2 \equiv \frac{1}{\delta}$$

$$Q(Z) = 1 + a_3 Z^2 + a_2 Z^3 + a_0 Z^5 =$$

$$= 1 + \frac{a_3}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \frac{a_0}{z^5} \qquad (**)$$

$$Q(0) = 1$$

Z $(*)$, $(**)$ plyne

$$Q(Z) = \frac{P(z)}{z^5}$$

Tedy

$$\varepsilon > |Q(Z) - Q(0)| = \left|\frac{P(z)}{z^5} - 1\right|$$

a po úpravách

$$\left|\frac{P(z)}{z^5} - 1\right| = \frac{|P(z) - z^5|}{|z|^5} = \frac{1}{r^5}|P(z) - z^5|$$

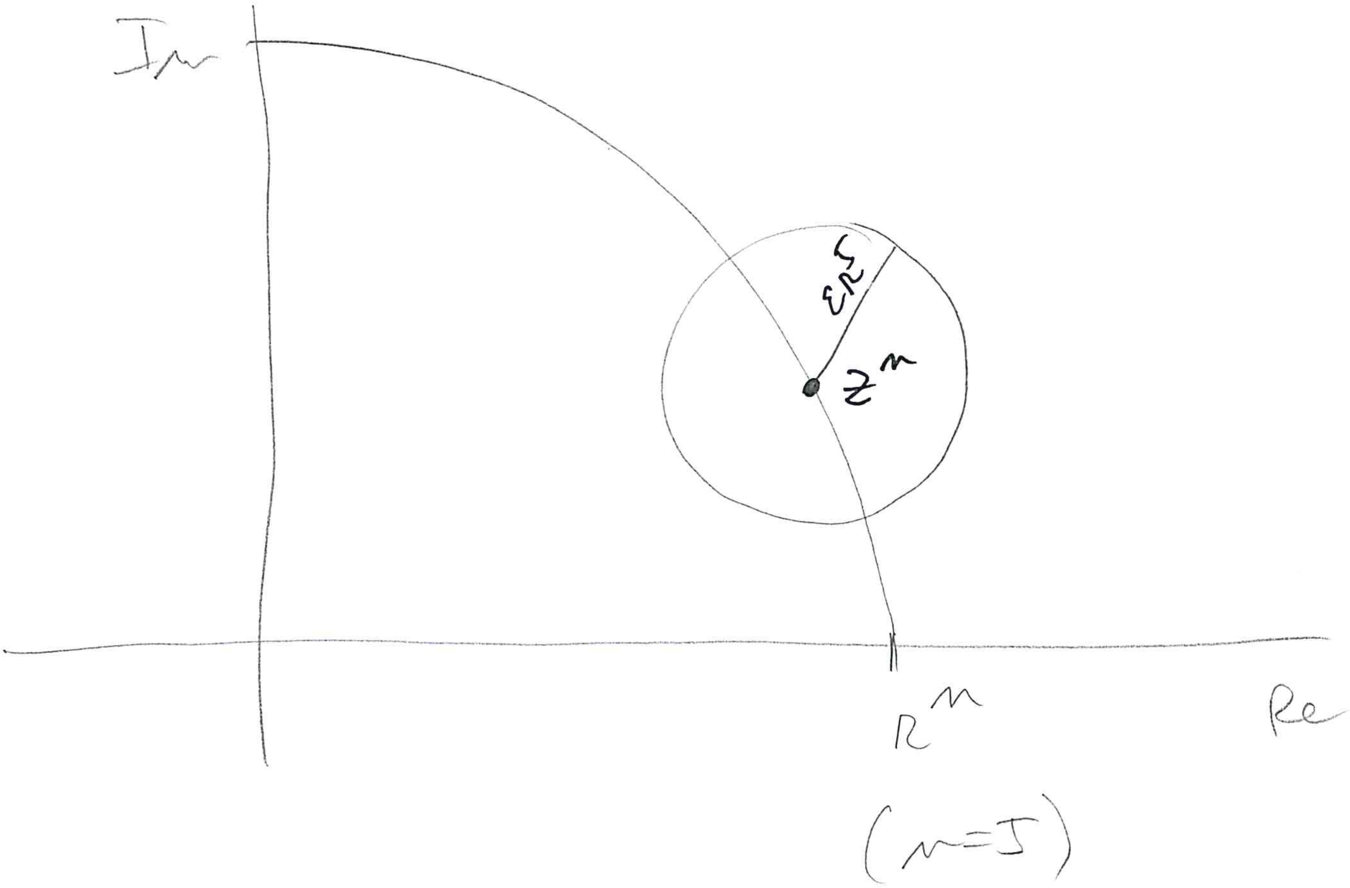
$$(|z| = r)$$

dostaneme

$$\frac{1}{R^5}\left|P(z)-z^5\right| < \varepsilon$$

tedy

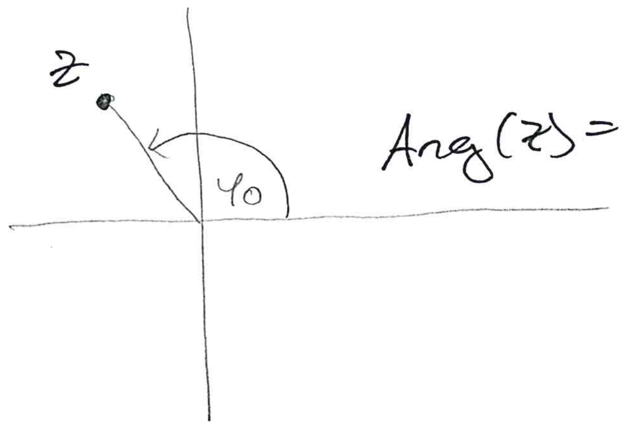
$$\left|P(z)-z^5\right| < \varepsilon R^5$$



Tedy body křivky (U) pro $R > R_2$ jsou v kruhu o poloměru εR^n, jehož střed obíhá $n$krát po kružnici o poloměru R^n ~~a~~ se středem v počátku.

Počet „oběhů" křivky (U) okolo počátku budeme měřit pomocí funkce argument – jedná se o vícehodnotovou funkci – obraz není číslo, ale množina čísel

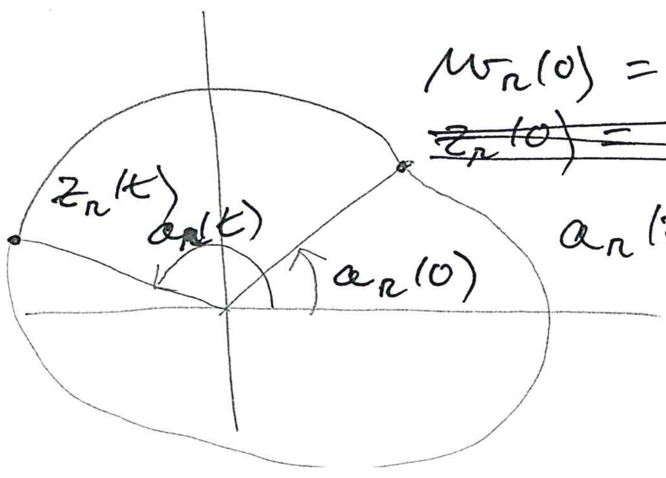
$$\operatorname{Arg}(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$$



$$\operatorname{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ukážeme, že pro křivky (U), které neprocházejí počátkem existuje spojitá funkce a_r, pro kterou platí

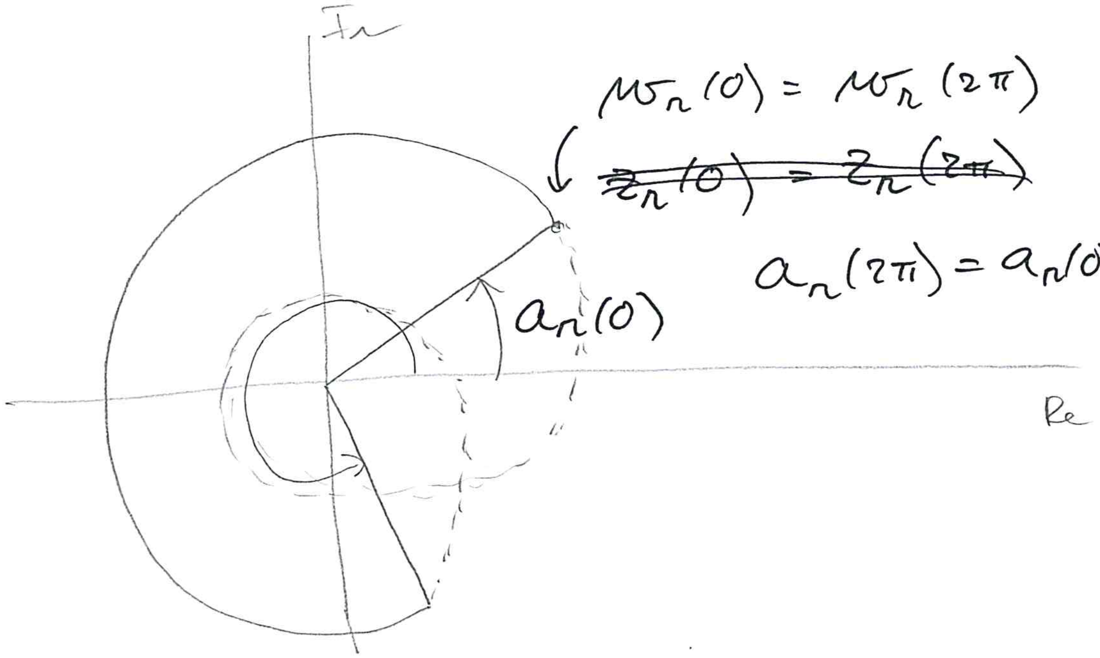
$a_r(t) \in \cancel{\operatorname{Arg}(z_r(t))}\ \operatorname{Arg}(w_r(t))$



$$w_r(0) = w_r(2\pi)$$

$$\cancel{z_r(0) = z_r(2\pi)}$$

$$a_r(2\pi) = a_r(0) + 2\pi$$



$w_r(0) = w_r(2\pi)$

$\cancel{z_r(0) = z_r(2\pi)}$

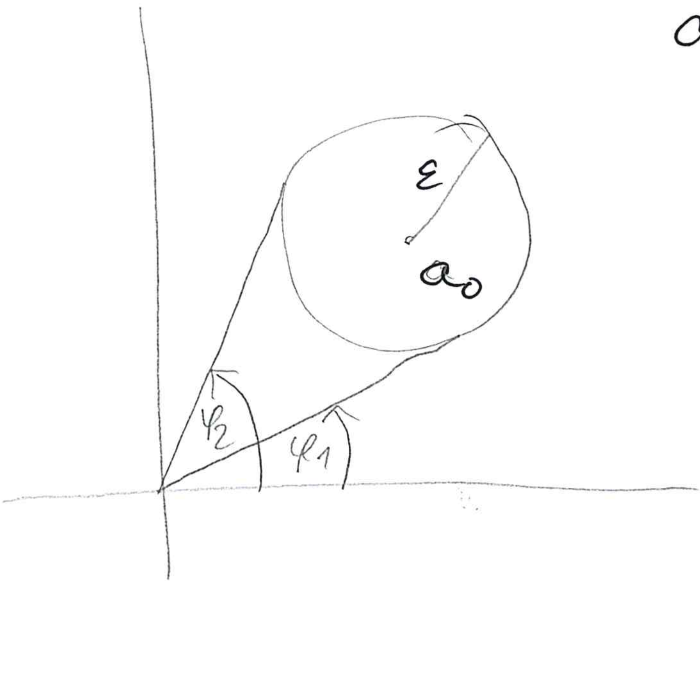
$a_r(2\pi) = a_r(0) + 4\pi$

Počet oběhů křivky (υ) pak je

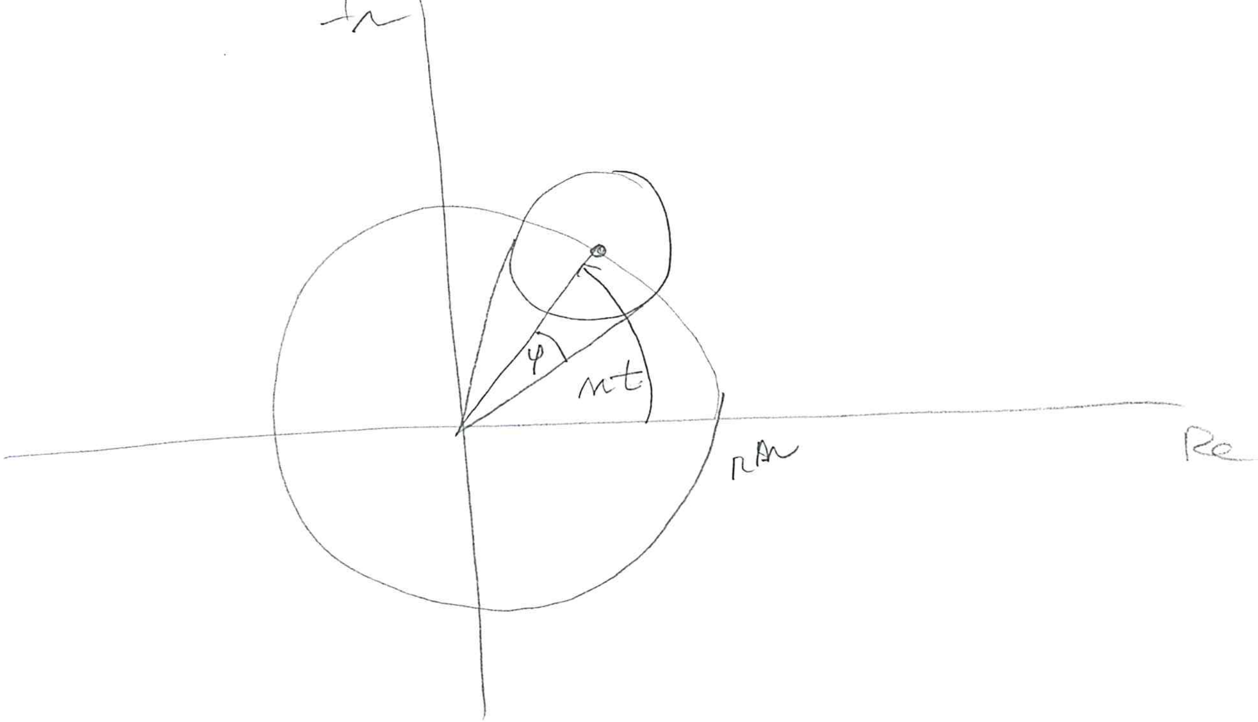
$$l(r) = \frac{a_r(2\pi) - a_r(0)}{2\pi}$$

Pro $r < R_1$ je $a_r(t) \in [\varphi_1, \varphi_2]$,

a tedy $l(r) = 0$



Pro $r > R_2$



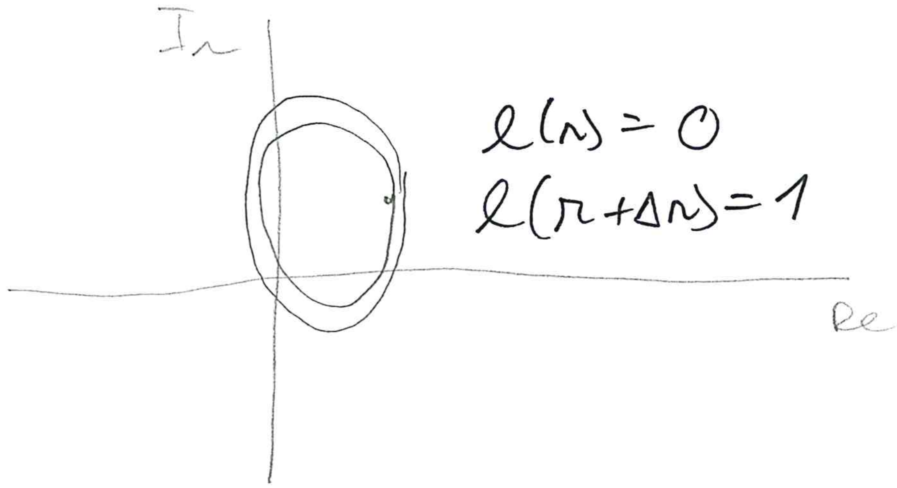
je $a_r(t) \in [nt-\varphi, nt+\varphi]$,

proto $a_r(2\pi) = a_r(0) + 2\pi n$

a $\ell(r) = n$

Dále víme: $l(r) \in \mathbb{Z}$

Zbývá ukázat, že hodnota $l(r)$ má v bodě r nespojitost pouze v případě, že křivka (U) prochází počátkem



Protože pro $r < R_1$ je $l(r) = 0$,
pro $r > R_2$ je $l(r) = n$,
$l(r) \in \mathbb{Z}$,

má l v nějakém bodě nespojitost, příslušná křivka (U) prochází počátkem a na jejím vzoru (K) tedy leží kořen polynomu P.