P je polynom stupně $n \geq 1$

$K_{r_0} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = r_0 \}$ je kružnice,

předpokládáme, že na K_{r_0} neleží kořen P, tj

$$(\forall z \in K_{r_0})(P(z) \neq 0) \quad (*)$$

Cíl:

Ukázat, že funkce ℓ, která poloměru $r > 0$ přiřazuje počet $\ell(r)$ otáček křivky w_r okolo počátku je v bodě r_0 spojitá.

Odtud a z $\ell(r) \in \mathbb{N}$ plyne, že je ℓ v okolí r_0 konstantní.

Víme:

1) K_{r_0} a mezikruží

$$M_{r_0,\Delta r} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \in [r_0 - \Delta r, r_0 + \Delta r] \}$$

jsou kompaktní množiny

v MP $(\mathbb{C}, |\cdot - \cdot|)$

2) P, $|P|$ jsou funkce

spojité na $\mathbb{C}$

Odtud plyne:

a) $|P|$ nabývá na K_{r_0} minima

$$v = \min \{ |P(z)| : z \in K_{r_0} \}$$

Z $(*)$ plyne $v > 0$

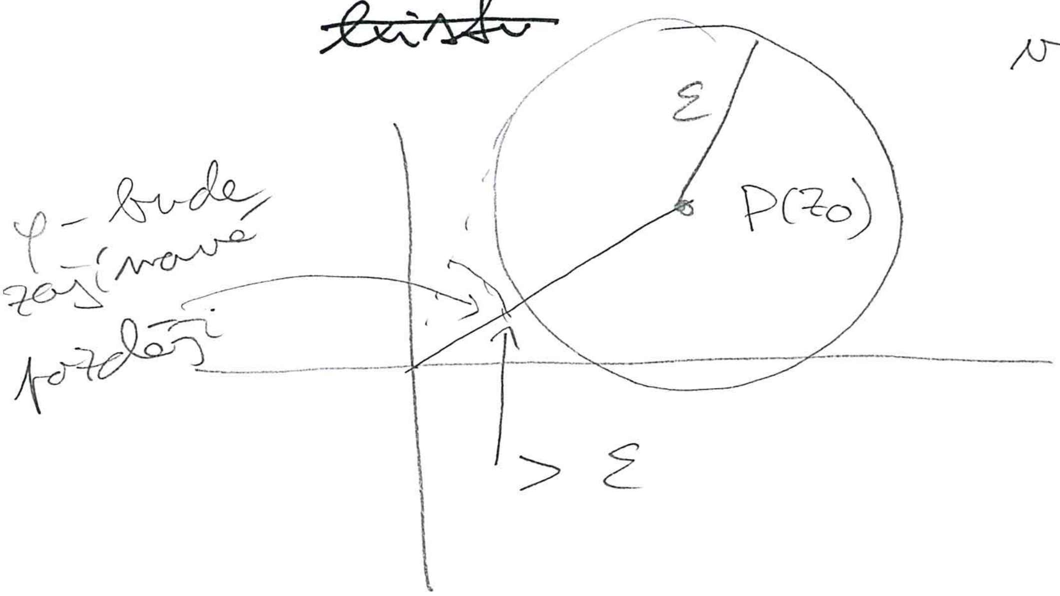
~~b) P je na $M_{r_0,\Delta r}$ stejnoměrně spojitá~~

~~Důkaz:~~

zvolme $z_0 \in M_{r_0,\Delta r}$,

$\varepsilon = \frac{v}{2} > 0$ (nebo ε menší, bude důležité v závěru)

~~[illegible]~~



$U_\varepsilon(P(z_0)) \not\ni 0$, proto lze na $U_\varepsilon(P(z_0))$ definovat spojitou větev argumentu

b) P je stejnoměrně spojitá na $M_{r_0,\Delta r}$,

proto k $\varepsilon = \frac{r}{2}$

existuje $\delta > 0$, že pro $z_1, z_2 \in M_{r_0,\Delta r}$,

$|z_1 - z_2| < \delta$ platí

$$|P(z_1) - P(z_2)| < \varepsilon$$

Pomocí okolí lze zapsat (zvolili jsme $z_1 = z_0$)

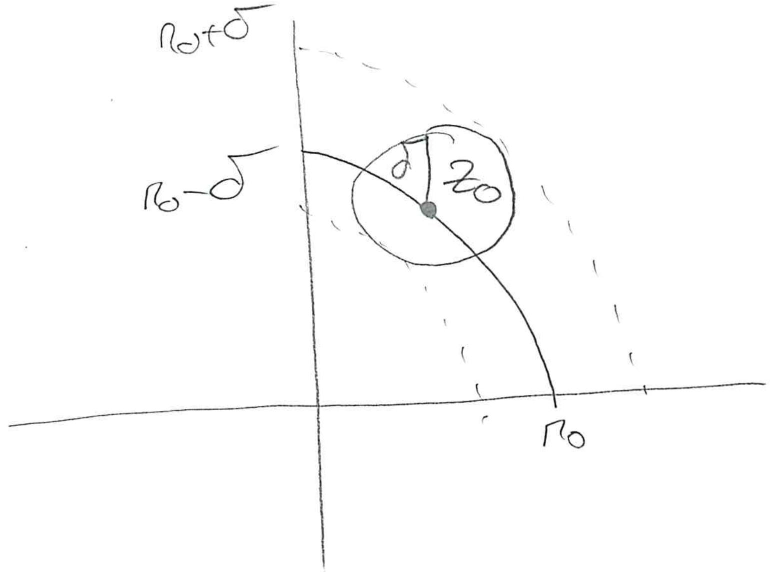
$$P(U_\delta(z_0)) \subseteq U_\varepsilon(P(z_0))$$

a tedy lze na $U_\delta(z_0)$

definovat spojitou větev

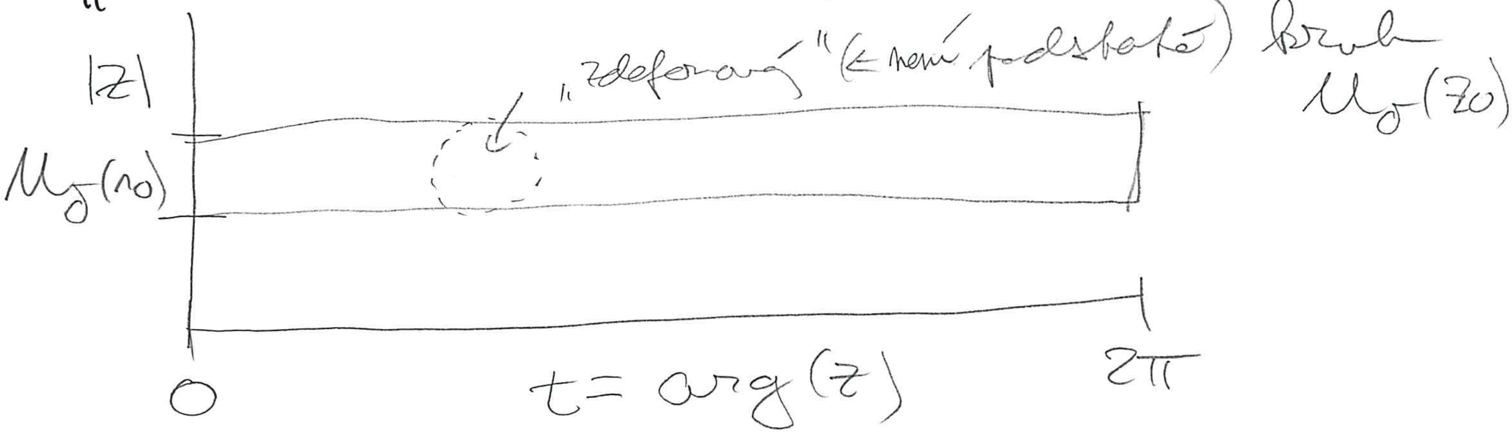
$$\arg(P(z)) \equiv a_{|z|}(\arg(z))$$

(funkce a_r z důkazu základní věty algebry)



Mezikruží $\{z\in\mathbb{C} : |z| \in U_\delta(r_0)\}$

„roztáhneme" do pásku



Na $[0,2\pi]\times U_\delta(r_0)$ lze „pospojováním" definovat spojitou funkci

$$A(t,r) = a_r(t)$$

splňující

$$|A(t_0,r) - A(t_0,r_0)| < \varphi$$

viz obrázek na straně 2

odtud pro

$$\ell(r) = \frac{A(2\pi, r) - A(0, r)}{2\pi}$$

plyne

$$|\ell(r) - \ell(r_0)| \leq \frac{2\varphi}{2\pi}$$

Volbou dostatečně malého ε dosáhneme $\frac{\varphi}{\pi} < 1$, odtud plyne $\ell(r) = \ell(r_0)$

$\square$