Derivace funkce komplexní proměnné

23. listopadu 2022

Metrický prostor

Úkol: Ukažte, že množina komplexních čísel spolu se zobrazením $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ tvoří metrický prostor.
Návod: Buď napište axiomy metrického prostoru a ukažte, že jsou splněny (stačí vám k tomu základní vlastnosti absolutní hodnoty) nebo ukažte izometrický izomorfismus s Euklidovským prostorem E_2 (tj. $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou).

Komplexní funkce jako dvojice reálných funkcí dvou reálných proměnných

Funkci $z \mapsto f(z)$, kde $z \in \mathbb{C}$ i $f(z) \in \mathbb{C}$, tedy komplexní funkci komplexní proměnné lze rozkladem na reálnou a imaginární část vyjádřit pomocí dvou reálných funkcí reálné proměnné.
Příklad: pro $f(z) = z^2$ je

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

a příslušná dvojice reálných funkcí je

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = x^2 - y^2 \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = 2xy$$

Pro $f(z) = \exp(z)$ je

$$f(x+iy) = \exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

a příslušná dvojice reálných funkcí je

$$u(x,y) = \exp(x)\cos(y) \quad v(x,y) = \exp(x)\sin(y)$$

Limity komplexní funkce

Nahoře je zmínka o izometrickém izomorfismu mezi $(\mathbb{C}, |. - .|)$ a $(\mathbb{R}^2, \|. - .\|_e)$. Odtud plyne, že limitu funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lze zkoumat jako limitu funkce

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$$

ve výše uvedených příkladech je pro $f(z) = z^2$

$$F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

a pro $f(z) = \exp(z)$ je

$$F(x,y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y))$$

Z hlediska oboru hodnot jsou limity snadné, počítáme je po složkách. Tj.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(u(x,y),v(x,y)) = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y), \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)\right)$$

Z hlediska definičního oboru je situace komplikovanější, máme tzv. dvojnou limitu, která vyžaduje stejnou limitu po všech přímkách i spojitých křivkách (procházejících limitním bodem (x_0, y_0)).

Derivace komplexní funkce

Definice je stejná jako v reálném oboru, tedy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Přepíšeme derivaci pomocí reálných funkcí u, v

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Příklad: $f(z)=\overline{z}$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Spočítáme derivaci po přímkách rovnoběžných s osami. Nejdříve rovnoběžku s osou x

$$\Delta x\to 0, \Delta y = 0: \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = 1$$

A ještě rovnoběžku s osou y

$$\Delta x\to 0, \Delta y = 0: \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

Závěr: limita neexistuje, a proto nemá funkce $z\to\overline{z}$ derivaci v žádném bodě $z\in\mathbb{C}$.

Příklad: $f(z)=|z|$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z}$$

Zase budeme počítat limitu po přímkách rovnoběžných s osami.

$$\Delta x\to 0, \Delta y=0:$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x+iy|-|x+iy|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+y^2-(x^2+y^2)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Výpočet je korektní pro $z = x + iy \neq 0$. Pro $z = 0$ nebudeme zlomek rozšiřovat (nulou), máme limitu $\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x|/\Delta x$, o které zjistíme, že neexistuje (zprava je rovna jedné, zleva minus jedné).

$$\Delta y \to 0, \Delta x = 0 :$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{|x + iy + i\Delta y| - |x + iy|}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{i\Delta y} =$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2)}{i\Delta y \left(\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \right)} =$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y\Delta y + (\Delta y)^2}{i\Delta y \left(\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \right)} = \frac{2y}{2i\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Závěr: pro $z = 0$ derivace neexistuje, protože neexistuje limita po přímce rovnoběžné s osou y a pro $z \neq 0$ derivace neexistuje, protože se limity po přímkách rovnoběžných s osami nerovnají.

Cauchy-Riemannovy podmínky

Cauchy-Riemannovy podmínky odvodíme přes limity po přímkách.

$$\Delta x \to 0, \Delta y = 0 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x}$$

Po úpravě:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Rovnoběžka s osou y

$$\Delta y \to 0, \Delta x = 0 : \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y}$$

A po úpravě (ve druhém výrazu se i pokrátí, v prvním upravíme $1/i$ na $-i$):

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Limity po obou přímkách se rovnají, proto platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Cauchy-Riemannovy podmínky získáme porovnáním reálné a imaginární části

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Zároveň jsme odvodili vztah

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

Příklad: Pro $f(z) = z^2$ jsme výše odvodili $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Příklad: Pro $f(z) = \exp(z)$ jsme výše odvodili

$$u(x,y) = \exp(x)\cos(y), \qquad v(x,y) = \exp(x)\sin(y)$$

Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \exp(x)\cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \exp(x)\sin(y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Úloha: Ukažte, že pro funkce $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto |z|$ Cauchy-Riemannovy podmínky splněny nejsou a pro funkce $z \mapsto z^3$, $z \mapsto z\exp(z)$ splněny jsou.

Vlastnosti derivací

Platí stejné (a stejně se i odvodí) vzorce pro derivaci a aritmetické operace, derivaci složené funkce a derivaci mocniny s přirozeným exponentem (mocniny s jiným exponentem zatím vynecháme protože je není možné definovat stejně přímočaře jako v reálném oboru).
Pro $f(z) = z^2$ ověříme $f'(z) = 2z$ s použitím (1)

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} + i\frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$$

Podobně pro $f(z) = \exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= f'(x+iy) = \frac{\partial(\exp(x)\cos(y))}{\partial x} + i\frac{\partial(\exp(x)\sin(y))}{\partial x} \\ &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y) = \exp(z) \end{aligned}$$

Úkol: Pro obě výše uvedené funkce odvoďte derivaci z druhé varianty (1)

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Z existence derivace jsme odvodili Cauchy-Riemannovy podmínky. Jsou tedy **nutnou podmínkou existence derivace**.

Na příkladě funkce $f(z) = \exp(-1/z^4)$ rozšířené v nule nulou (tj. $f(0) = 0$) ukážeme, že nejsou postačující podmínkou. Pro $z \neq 0$ je (viz poznámka o vlastnostech derivací)

$$f'(z) = \frac{4\exp(-1/z^4)}{z^5}$$

a odtud plyne platnost Cauchy-Riemannových podmínek.
Pro $z = 0$ je

$$f(x,0) = \exp(-1/(x+0i)^4) = \exp(-1/x^4) \qquad f(0,y) = \exp(-1/(0+iy)^4) = \exp(-1/y^4)$$

a tedy

$$u(x,0) = \exp(-1/x^4), v(x,0) = 0 \qquad u(0,y) = \exp(-1/y^4), v(0,y) = 0$$

K výpočtu derivace použijeme definici

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(-1/h^4) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/h}{\exp(1/h^4)} \tag{2}$$

Substitucí $H = 1/h$ převedeme jednostranné limity pro $h \to 0^{\pm}$ na limity v nekonečnech

$$\lim_{H\to\pm\infty} \frac{H}{\exp(H^4)}$$

tuto limitu spočítáme pomocí L'Hospitalova pravidla a vyjde nula, proto i (2) vyjde nula. Odtud plyne, že všechny derivace vyskytující se v Cauchy-Riemannových podmínkách jsou rovny nule a tedy jsou podmínky splněny.
Derivaci v bodě nula ale funkce f nemá, protože není v nule spojitá (stejně jako v reálném případě z konečné derivace v bodě plyne spojitost v bodě). Spojitá není, protože limita po přímce $z = t + it$ je rovna

$$\lim_{t\to 0} \exp(-1/(t+it)^4)$$

a $(t+it)^4 = t^4(1+i)^4 = -4t^4$, odtud $\exp(-1/(t+it)^4) = \exp(1/(4t^4))$ a limita je tedy rovna nekonečnu – není rovna $f(0) = 0$ a proto není funkce f v bodě nula spojitá.

Derivace funkce dvou proměnných

K formulaci nutné a postačující podmínky pro existenci derivace funkce komplexní proměnné připomeneme co je derivace funkce dvou proměnných. V dalším jsou $a \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ body v $\mathbb{R}^2$ a $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Říkáme, že má u v bodě a derivaci, pokud zbytek Taylorova polynomu prvního stupně

$$R_1(v) = u(a+v) - u(a) - v \cdot \operatorname{grad} f(a)$$

vyhovuje vztahu

$$\lim_{v\to(0,0)} \frac{R_1(v)}{\|v\|} = 0$$

Nutná a postačující podmínka existence derivace

Nutnou a postačující podmínkou existence derivace funkce f v bodě $z = x + iy$ je splnění C-R podmínek v bodě z spolu s existencí derivace funkcí $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ v bodě (x, y).

TODO: důkaz