

Komplexní proměnná – úlohy na úvod

23. září 2022

Základní část

1. *Zavedení komplexních čísel*

Jak se na střední škole zavádějí/definují komplexní čísla?

2. *Algebraické operace a algebraický tvar*

Vysvětlete, co je algebraický tvar komplexního čísla a převed'te výraz na algebraický tvar

$$\frac{(1+3i)(2-i)}{1-i} + 3 - 5i$$

3. *Polární souřadnice*

Volte body v kartézské souřadné soustavě a určete jejich polární souřadnice. Buď proveďte výpočet pro jeden bod v každém kvadrantu nebo popište obecný algoritmus.

4. Čemu je rovno i^n pro $n \in \mathbb{N}$?

5. Zvolte dvojčíferné n a vypočtete $z_n = (1+i)^n$, případně popište algoritmus na výpočet z_n v obecném případě.

6. Zobrazte v komplexní (Gaussově) rovině čísla z_1, z_2 a jejich součin a podíl. Volte hodnoty $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$.

$$z_1 = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \quad z_2 = \cos(\beta) + i \sin(\beta)$$

7. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r .

Rozšiřující část

8. Zvolte v Gaussově rovině komplexní číslo z a zobrazte čísla

$$w_1 = z + 2 - i, \quad w_2 = -2z, \quad w_3 = (\sqrt{3}/2 + i/2)z, \quad w_4 = z/(\sqrt{3}/2 + i/2)$$

9. Dokažte matematickou indukci Moivreův vzorec.

10. Jakou křivku popisuje funkce $w = z^2$, kde za z dosadíme parametrické rovnice kružnice z úlohy 7? Podobně pro $w = z^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

11. Jak lze graficky znázornit komplexní funkci komplexní proměnné?

12. Načrtněte v Gaussově rovině křivky o rovnicích

$$\operatorname{Re}(z^2) = 1, \quad \operatorname{Re}(z^2) = -1, \quad \operatorname{Re}(z^2) = 0$$

Zde $\operatorname{Re}(x + iy) = x$ značí reálnou část komplexního čísla.

13. Podobně pro imaginární část $\operatorname{Im}(x + iy) = y$ načrtněte křivky o rovnicích

$$\operatorname{Im}(z^2) = 1, \quad \operatorname{Im}(z^2) = -1, \quad \operatorname{Im}(z^2) = 0$$

14. Načrtněte v Gaussově rovině křivky o rovnicích

$$z = (1 + it)^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = (t + i)^2, \quad t \in \mathbb{R}$$