

Písemná část zkoušky z UKPX/UKAM

12. ledna 2023

1. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

1* Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|z^n| = |z|^n$.

2. Vypočtete kořeny rovnic v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

(a) $(z - 1)^4 = -1$

(b) $z^2 - iz = 1$

2* Zobrazte v komplexní rovině kořeny rovnice $z^6 - iz^3 = 1$

3. Ověřte platnost Cauchy-Riemannových podmínek pro funkci

$$f(z) = \exp(z^2)$$

3* Zjistěte, pro která $z \in \mathbb{C}$ splňuje funkce f Cauchy-Riemannovy podmínky

$$f(z) = z \exp(|z^2|)$$

4. Vypočtete kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

$$\sin(z) = i$$

4* Nalezněte minimální hodnotu funkce $f(z) = |z - 2|$ na množině

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \sin(z) = i\}$$

5. Vypočtete poloměr konvergence mocninné řady. Kruh konvergence mocninné řady zakreslete do komplexní roviny.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+2)^k}{2^k}$$

5* Zakreslete obor konvergence řady do Gaussovy roviny.

$$\sum_{k=-5}^{+\infty} \frac{(z+2)^{-k}}{2^k}$$

6*(žolík) Napište Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě nula, vyčíslete alespoň čtyři její nenulové koeficienty.

$$f(z) = \frac{2}{1-z^2}$$