Derivace funkce komplexní proměnné

22. října 2024

Okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ je množina

$$B_\varepsilon(z_0) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\},$$

prstencové okolí je množina

$$P_\varepsilon(z_0) \equiv B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Definice limity. Komplexní číslo L nazveme limitou funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in P_\delta(z_0))(f(z) \in B_\varepsilon(L))$$

Zapisujeme

$$L = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

Nutná podmínka existence limity. Okolí bodu i definice limity je stejná jako u funkce dvou reálných proměnných. Proto je, jako v případě funkce dvou proměnných, nutnou podmínkou existence limit po rovnoběžkách s osami a rovnost těchto limit.

$$\lim_{x \to x_0} f(x + iy_0) = \lim_{y \to y_0} f(x_0 + iy)$$

Definice derivace. Derivací funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme komplexní číslo

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Příklady.

1. $f(z) = z^2$, spočítáme limity po přímkách

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x + iy_0)^2 - (x_0 + iy_0)^2}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + 2ixy_0 - 2ix_0y_0}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0 + 2iy_0) = 2x_0 + 2iy_0 = 2z_0$$

$$\lim_{y\to y_0}\frac{(x_0+iy)^2-(x_0+iy_0)^2}{x_0+iy-(x_0+iy_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{2ix_0y-2ix_0y_0-y^2+y_0^2}{i(y-y_0)}=$$
$$\lim_{x\to x_0}(2x_0+iy+iy_0)=2x_0+2iy_0=2z_0$$

Nutná podmínka existence limity je splněna. Derivace tedy možná existuje a je rovna $f'(z_0)=2z_0$. Existenci ukážeme později.

2. $f(z)=\overline{z}$, spočítáme limity po přímkách

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{x+iy_0}-\overline{x_0+iy_0}}{x+iy_0-(x_0+iy_0)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{x-iy_0-(x_0-iy_0)}{x-x_0}=1\\ \lim_{y\to y_0}\frac{\overline{x_0+iy}-\overline{x_0+iy_0}}{x_0+iy-(x_0+iy_0)} &= \lim_{y\to y_0}\frac{x_0-iy-(x_0-iy_0)}{i(y-y_0)}=-1\end{aligned}$$

Závěr: funkce $f(z)=\overline{z}$ nemá derivaci v žádném bodě $z_0\in\mathbb{C}$.

3. V obecném případě vyjádříme $f(z)$ pomocí dvou reálných funkcí dvou reálných proměnných

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

Limity po přímkách jsou rovny

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{x+iy_0-(x_0+iy_0)}=\\ = & \lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y_0)-v(x_0,y_0))}{x-x_0}\\ = & \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ & \lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{x_0+iy-(x_0+iy_0)}=\\ = & \lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0,y)-v(x_0,y_0))}{i(y-y_0)}\\ = & \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Rovnost limit zapíšeme

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Odtud porovnáním reálné a imaginární části dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\tag{1}$$

Cauchy-Riemannovy podmínky. Nutnou podmínkou existence derivace funkce $f = u + iv$ v bodě z je splnění podmínek (1) v tomto bodě. Tyto podmínky nazýváme Cauchy-Riemannovými podmínkami.

Důkaz plyne z předchozího.

Nutná a postačující podmínka existence derivace. Funkce $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ má v bodě $z = x + iy$ derivaci podle komplexní proměnné právě když maji funkce u, v v bodě $[x, y]$ derivaci a jejich parciální derivace splňují Cauchy-Riemannovy podmínky.

Důkaz. Funkce f má derivaci v bodě z rovnu D právě když rozdíl

$$r(\Delta z, z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - D \tag{2}$$

splňuje

$$\lim_{\Delta z \to 0} r(\Delta z, z) = 0 \tag{3}$$

Z (2) vyjádříme

$$f(z + \Delta z) = f(z) + D\Delta z + r(\Delta z, z)\Delta z \tag{4}$$

Vztah (4) převedeme do reálného maticového tvaru. Zde je $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $f = u + iv$, $D = D_x + iD_y$

$$\begin{pmatrix} u(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_x & -D_y \\ D_y & D_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(r(\Delta z, z)\Delta z) \\ \mathrm{Im}(r(\Delta z, z)\Delta z) \end{pmatrix} \tag{5}$$

V analýze funkcí dvou proměnných je derivace funkce u definovaná jako lineární zobrazení dané vektorem $L = (L_{1u}, L_{2u})$ splňující

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x,y) + L_{1u}\Delta x + L_{2u}\Delta y + R_u(x, y, \Delta x, \Delta y) \tag{6}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{R_u(x, y, \Delta x, \Delta y)}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0 \tag{7}$$

Analogicky pro funkci v. Přepíšeme (6) do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} u(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{1u} & L_{2u} \\ L_{1v} & L_{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_u(x, y, \Delta x, \Delta y) \\ R_v(x, y, \Delta x, \Delta y) \end{pmatrix} \tag{8}$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že podmínky (3), (7) na rezida jsou ekvivalentní a rovnost matic

$$\begin{pmatrix} D_x & -D_y \\ D_y & D_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1u} & L_{2u} \\ L_{1v} & L_{2v} \end{pmatrix}$$

je ekvivalentní s Cauchy-Riemannovými podmínkami.

Postačující podmínka existence derivace. Postačující podmínkou existence derivace funkce f podle komplexní proměnné v bodě $z = x + iy$ je spojitost parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ v bodě $[x, y]$ a splnění Cauchy-Riemannových podmínek v tomto bodě.

Důkaz. Spojitost parciálních derivací funkcí u, v je postačující podmínkou existence derivace těchto funkcí. Tvrzení pak plyne z předchozí věty o nutné a postačující podmínce.

Ještě jeden pohled na derivaci jako lineární zobrazení. Připomeňme, že zobrazení L na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ nazýváme lineárním zobrazením, pokud splňuje

1. $L(a + b) = L(a) + L(b)$ pro $a, b \in V$
2. $L(\alpha a) = \alpha L(a)$ pro $a \in V$, $\alpha \in \mathbb{T}$

Uvažujme nyní vektorový prostor $V_1 = \mathbb{C}$, který je izomorfní s prostorem $V_2 = \mathbb{R}^2$ (tento izomorfismus jsme výše používali přepisováním derivací v komplexním oboru na maticovou variantu v reálném oboru).

Zaměříme se na druhou podmínku linearity a její odlišnost pro tělesa $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Pro $\alpha = i$ a $z = x + iy$ je maticový tvar $iz = ix - y$ následující

$$i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Uvažujme lineární zobrazení L na prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem reálných čísel

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 x + L_2 y \\ L_3 x + L_4 y \end{pmatrix} \tag{9}$$

Podmínku $L(iz) = iL(z)$ nad tělesem komplexních čísel zapíšeme v maticovém reálném tvaru

$$L \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(L_3 x + L_4 y) \\ L_1 x + L_2 y \end{pmatrix} \tag{10}$$

Levou stranu (10) vyjádříme pomocí (9) a pravou stranu upravíme (roznásobíme závorku)

$$\begin{pmatrix} -L_1 y + L_2 x \\ -L_3 y + L_4 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_3 x - L_4 y \\ L_1 x + L_2 y \end{pmatrix}$$

Odtud porovnáním koeficientů u x a y dostaneme Cauchy-Riemannovy podmínky

$$L_1 = L_4, \quad L_2 = -L_3$$