Holomorfní funkce

25. října 2024

Definice holomorfní funkce. Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkci $f : G \to \mathbb{C}$ nazveme holomorfní funkcí na množýině G, pokud pro každé $z \in G$ existuje derivace $f'(z)$.

Věta o holomorfní funkci. (V [JV-UKP] věta 5.9.8) Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Nechť $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. Funkce f je holomorfní na množině G (tj. má na G první derivaci).
2. Funkce f má na G derivaci všech řádů.
3. Nechť $z_0 \in G$, $r > 0$ splňuje $B_r(z_0) \subseteq G$, nechť $z \in B(z_0, r)$. Pak platí
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$
To znamená, že Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $z_0 \in G$ konverguje k f na libovolném kruhu, který se celý vejde do G.

Příklady, které ukazují, že v reálném oboru věta neplatí.

1. Funkce $f(x) = x|x|$ má derivaci na $\mathbb{R}$ rovnu $f'(x) = 2|x|$, ale v bodě $x = 0$ nemá druhou derivaci.
2. Funkce
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů. Taylorova řada funkce f v bodě $x = 0$ je $T(x) = 0$ a tedy pro $x \neq 0$ je $T(x) \neq f(x)$.

Věta (další vlastnosti holomorfních funkcí). Nechť je f holomorfní na otevřené množině G. Pak platí

1. Funkce f je spojitá na G.

   Důkaz (rozmyslete podrobnosti): z existence derivace plyne $\lim_{z \to z_0}(f(z) - f(z_0)) = 0$ a odtud plyne spojitost f v bodě z_0.

2. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{C}$, pro niž platí $F' = f$. Funkci F nazýváme primitivní funkcí k funkci f na množině G.

3. Pro spojitou funkci $\varphi : [0,1] \to G$ platí

$$\int_0^1 f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = F(\varphi(1)) - F(\varphi(0))$$

Poznámka: funkci φ budeme nazývat křivkou. Geometrické představě křivky odpovídá obor hodnot funkce φ, která je parametrickým popisem křivky. Podle vlastností funkce φ budeme mluvit o spojité křivce, diferencovatelné křivce.

4. Pro libovolnou uzavřenou křivku popsanou spojitou funkcí $\varphi : [0,1] \to G$, $\varphi(0) = \varphi(1)$ platí

$$\int_0^1 f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

5. Mějme dvě spojité diferencovatelné křivky s počátečním bodem $z_0 \in G$: $\varphi : [0,1] \to G$, $\psi : [0,1] \to G$, $\varphi(0) = \psi(0) = z_0$. Úhel, který svírají v bodě z_0 označíme α

$$\alpha = \arg\left(\frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}\right) \tag{1}$$

Nechť $f'(z_0) \neq 0$.

Pak křivky $f(\varphi)$, $f(\psi)$ svírají v bodě $f(z_0)$ úhel α.

Důkaz tvrzení: úhel křivek $f(\varphi)$, $f(\psi)$ v bodě $f(z_0)$ spočítáme jako v (1)

$$\arg\left(\frac{(f(\varphi))'_+(0)}{(f(\psi))'_+(0)}\right)$$

Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce a pokrátíme nenulovým $f'(z_0)$

$$\frac{(f(\varphi))'_+(0)}{(f(\psi))'_+(0)} = \frac{f'(z_0)\varphi'_+(0)}{f'(z_0)\psi'_+(0)} = \frac{\varphi'_+(0)}{\psi'_+(0)}$$

Odtud dostaneme, že úhel vzorů se rovná úhlu obrazů

$$\alpha = \arg\left(\frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)}\right) = \arg\left(\frac{(f(\varphi))'_+(0)}{(f(\psi))'_+(0)}\right)$$

Příklad. Zvolte bod $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$ a vypočtěte úhel, který svírají v bodě z_0 křivky

$$\varphi(t) = (x_0 + i(y_0 + t))^2, \qquad \psi(t) = (x_0 + t + iy_0)^2,$$

Totéž proveďte pro bod $z_0 = 0$.

Příklad. Nechť funkce f má v bodě z_0 derivaci $f'(z_0)$. Nechť $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\varphi(0) = z_0$ je křivka s počátečním bodem z_0. Nechť existuje derivace (podle reálné proměnné) $t \equiv \varphi'_+(0) \neq 0$, $t \in \mathbb{C}$. Polohový vektor čísla t je (po rovnoběžném přenesení do působiště v bodě z_0) tečným vektorem ke křivce φ v bodě $z_0 = \varphi(0)$.

Vypočteme tečný vektor ke křivce $\psi(t) = f(\varphi(t))$ v bodě z_0. Použijeme pravidlo derivace složené funkce $\psi'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Dosazením $t = 0$ dostaneme

$$\psi'_+(0) = f'(\varphi(0))\varphi'_+(0) = f'(z_0)\varphi'_+(0) \tag{2}$$

Uvažujme nyní případ $f'(z_0) \neq 0$. Ze vztahu (2) plyne, že tečna ke křivce ϕ v bodě z_0 s tečnou k obrazu $\psi = f(\phi)$ v bodě $f(z_0)$ svírají úhel

$$\alpha = \arg(f'(z_0))$$

Uvažujte dvě přímky (kreslete obrázek) protínající se v bodě z_0 pod úhlem β. Funkce f zobrazí z_0 do bodu $f(z_0)$ (stále kreslete) a tečny k obrazům původních přímek se obě otočí ve stejném směru o stejný úhel α. Odtud plyne, že po zobrazení holomorfní funkcí f svírají tečny k obrazům stejný úhel jako tečny ke vzorům.