Spojitost funkce komplexní proměnné

a její procvičení v důkazu základní věty algebry

21. října 2024

Okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ je množina

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Poznámky.

1. Geometrický význam absolutní hodnoty $|z - z_0|$ je vzdálenost bodů z, z_0 v Gaussově (komplexní) rovině. Epsilon okolím bodu z_0 je tedy kruh se středem v bodě z_0 a poloměrem ε.

2. Značení B je z anglického ball. Používá se též U, tedy $U_\varepsilon(z_0)$, odvozené z německého umgebung.

Definice spojitosti. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in B_\delta(z_0))(f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$$

Pomocí absolutní hodnoty výrok zapíšeme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathbb{C})(|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$

Příklady.

1. Konstantní funkce $f(z) = c$ je spojitá ve všech bodech definičního oboru $z \in \mathbb{C}$. Plyne to z: $c \in B_\varepsilon(c)$, případně z $|c - c| = 0 < \varepsilon$.

2. Identita $f(z) = z$ je spojitá ve všech bodech definičního oboru $z \in \mathbb{C}$. K $\varepsilon > 0$ zvolíme v definici spojitosti $\delta = \varepsilon$. Výrok

$$(\forall z \in B_\delta(z_0))(f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$$

pro takto zvolené δ platí, protože po dosazení $\delta = \varepsilon$ a $f(z) = z$ dostáváme platný výrok

$$(\forall z \in B_\varepsilon(z_0))(z \in B_\varepsilon(z_0))$$

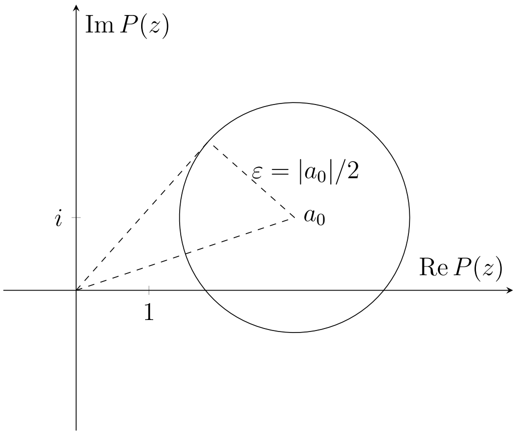
Věta o spojitosti a aritmetických operacích. Nechť jsou funkce f, g spojité v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak jsou v bodě z_0 spojité i funkce $f+g$, $f-g$, fg a za předpokladu $g(z_0) \neq 0$ je spojitá i f/g.

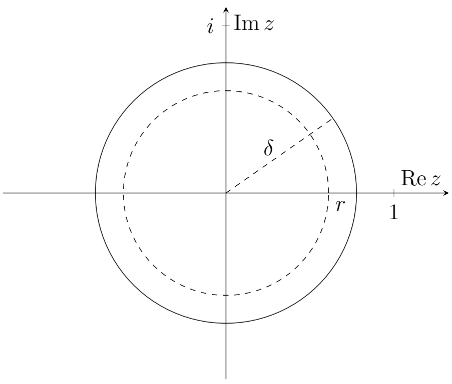
Důsledek. Polynom P je spojitý ve všech bodech definičního oboru $\mathbb{C}$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že polynom lze získat sčítáním a násobení z konstantních funkcí a identické funkce a použít větu o spojitosti a aritmetických operacích.

Příklad. Nechť P je polynom splňující $P(0) = a_0 \neq 0$. Zvolme $\varepsilon = |a_0|/2$. Na obrázku vlevo je znázorněno okolí $B_\varepsilon(a_0)$. Z definice spojitosti plyne, že existuje kladné δ takové, že pro z ležící v kruhu $|z| < \delta$ platí $P(z) \in B_\varepsilon(a_0)$.





Spojitá větev argumnetu na obrazu kružnice o poloměru $r < \delta$ a parametrických rovnicích

$$z(t) = r(\cos(t) + i\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

tedy na křivce

$$w(t) = P(r(\cos(t) + i\sin(t))), \quad t \in [0, 2\pi]$$

nabývá hodnot z intervalu $(\arg(a_0) - \varphi, \arg(a_0) + \varphi)$, kde úhel φ určíme z trojúhelníku čárkovaného na levém obrázku a je roven $\varphi = \pi/6$. Proto spojitá větev argumentu na této křivce splňuje $\arg(w(0)) = \arg(w(2\pi))$.

Závěr: Příklad ukázal, že obrazy kružnic o dostatečně malém poloměru neoběhnou počátek – všechny obrazy zůstávají v okolí $B_\varepsilon(a_0)$.

Příklad. Nyní se zaměříme na kružnice o velkém poloměru. Upravíme polynom stupně $n \geq 1$ (tedy $a_n \neq 0$)

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n} =$$
$$a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}(1/z) + \frac{a_{n-2}}{a_n}(1/z)^2 + \cdots + \frac{a_0}{a_n}(1/z)^n\right)$$

Pomocí pomocného polynomu

$$Q(w) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} w + \frac{a_{n-2}}{a_n} w^2 + \cdots + \frac{a_0}{a_n} w^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n} w^k$$

zapíšeme pro $z \neq 0$ hodnotu $P(z)$

$$P(z) = a_n z^n Q(1/z) \tag{1}$$

Zvolíme $\varepsilon = 1/2$. Ze spojitosti polynomu Q v bodě $w_0 = 0$ plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro $w \in \mathbb{C}$ platí

$$|w - 0| < \delta \Longrightarrow |Q(w) - Q(0)| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

Rozebereme vztahy v této implikaci:

$$|w| < \delta \tag{2}$$
$$|Q(w) - Q(0)| < \frac{1}{2} \tag{3}$$

Dosazením $w = 1/z$ do (2) dostaneme vztah $\left|\frac{1}{z}\right| < \delta$, který je ekvivalentní se vztahem

$$|z| > \frac{1}{\delta}$$

Dosazením $w = 1/z$ a $Q(0) = 1$ do (3) dostaneme vztah

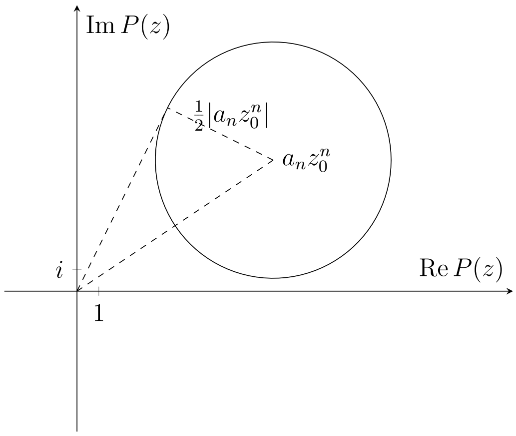
$$|Q(1/z) - 1| < \frac{1}{2}$$

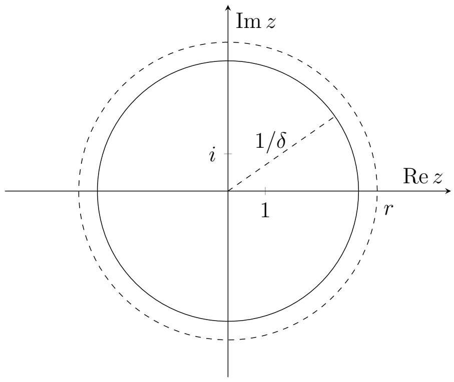
který vynásobíme výrazem $|a_n z^n|$

$$|a_n z^n Q(1/z) - a_n z^n| < \frac{1}{2}|a_n z^n|$$

Zde za $a_n z^n Q(1/z)$ dosadíme z (1) a dostaneme

$$|P(z) - a_n z^n| < \frac{1}{2}|a_n z^n|$$





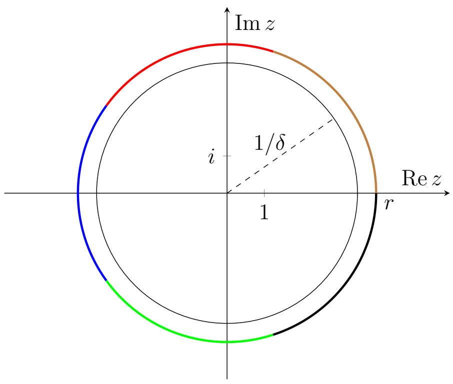
Závěr: Příklad ukázal, že body $z_0 = r(\cos(t) + i\sin(t))$ kružnice o dostatečně velkém poloměru ($r > 1/\delta$) se polynomem P zobrazí do okolí $B_\varepsilon(a_n z_0^n)$ o poloměru $\varepsilon = |a_n z_0^n|/2$.

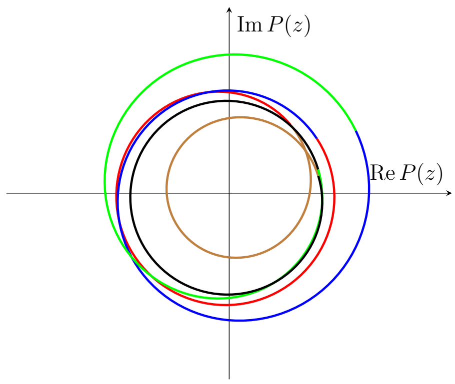
Další příklad není na spojitost funkce. Využívá ale předchozí příklad, proto ho zařadíme do tohoto textu. Na levém obrázku je křivka (kružnice) o parametrických rovnicích

$$z(t) = r(\cos(t) + i\sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Na pravém obrázku je křivka, která je obrazem kružnice v polynomu P.[1]

$$w(t) = P(z(t)) = P(r(\cos(t) + i\sin(t))), \qquad t \in [0, 2\pi]$$



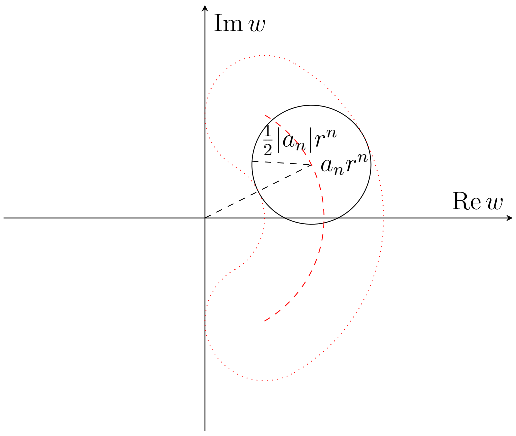


[1]Přesný předpis polynomu není důležitý, uvedeme jen to, že je pátého stupně.

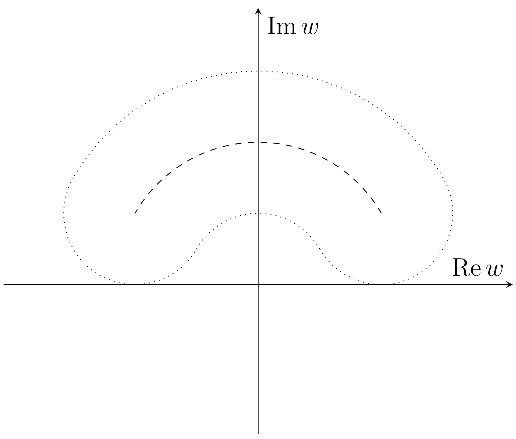
V dalším ukážeme, že na křivce $w(t)$ je možné definovat spojitou větev argumentu. Nejdříve uvedeme definici.

Definice. (Spojitá větev argumnetu na křivce v komplexní rovině.)
Nechť $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ je funkce, která (reálnému) číslu $t \in [a, b]$ přiřadí komplexní číslo $w(t)$. Spojitou funkci $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňující $A(t) \in \mathrm{Arg}(w(t))$ nazýváme spojitou větví argumentu na křivce w.

Bod $w(0) = P(z(0)) = P(r)$ leží v kružnici o středu v bodě $a_n(z(0))^n = a_n r^n$ a poloměru $|a_n|r^n/2$. Rozmyslete si, že taková kružnice může mít neprázdný průnik nejvýše s dvěma kvadranty. V těchto kvadrantech jsme napsali předpis spojité větve argumentu. Máme tedy předpis spojité větve argumentu křivky w na intervalu $[0, t_1]$. Přesná hodnota t_1 není v našich úvahách podstatná. Pro tuto polohu bodu a_n ji určíme z obrázku $t_1 = (\pi/3 - \arg(a_n))/n$.



Spojitou větev argumnetu prodloužíme na interval $t \in [0, t_1 + \pi/(2n)]$ použitím předpisu na polorovině $\mathrm{Im}(w) > 0$. A podobně na dalších polorovinách, až získáme spojitou větev argumentu pro celý interval $[0, 2\pi]$.



Naším dalším cílem, je ukázat, že počet oběhů křivky okolo počátku, který je roven

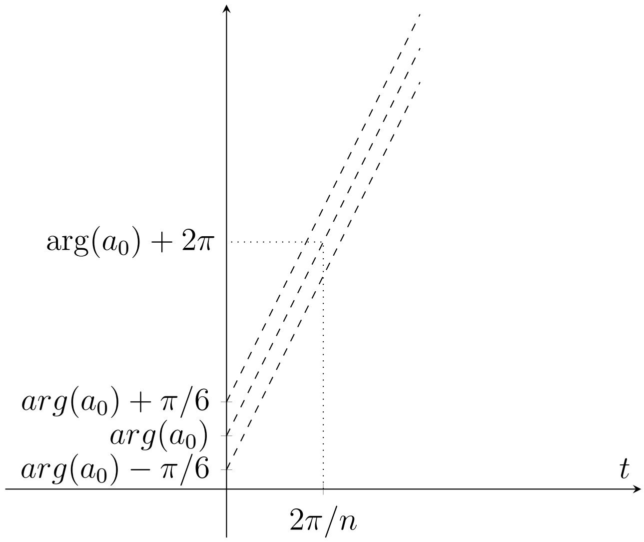
$$\frac{A(2\pi) - A(0)}{2\pi}$$

je roven stupni polynomu n.

Z předchozího výkladu plyne

$$\begin{aligned} A(0) &\in (\arg(a_n) - \pi/6, \arg(a_n) + \pi/6) \\ A(t) &\in (\arg(a_n) - \pi/6 + nt, \arg(a_n) + \pi/6 + nt) \\ A(2\pi) &\in (\arg(a_n) - \pi/6 + 2\pi n, \arg(a_n) + \pi/6 + 2\pi n) \end{aligned}$$

Graf funkce A (spojitá větev argumentu na křivce w) tedy leží mezi spodní a horní čárkovanou úsečkou.



Dále víme, že křivka w je uzavřená, tedy její počáteční a koncový bod splývají $w(0) = w(2\pi)$. Odtud plyne rovnost množin $\mathrm{Arg}(w(2\pi)) = \mathrm{Arg}(w(0))$. Rozdíl $A(2\pi) - A(0)$ je tedy celistvým násobkem 2π.

Z výše uvedených intervalů pro $A(2\pi)$, $A(0)$ pak plyne

$$\frac{A(2\pi) - A(0)}{2\pi} = n$$

Nyní definujme funkci p, která poloměru $r > 0$ přiřadí počet oběhů křivky w kolem počátku. Ukázali jsme, že pro malé poloměry r je $p(r) = 0$ a pro velké poloměry je $p(r) = n$.

K dokončení důkazu základní věty algebry je třeba ukázat

1. Funkce p je dobře definovaná pro všechny poloměry r za předpokladu, že křivka w neprochází počátkem.

2. Na každém intervalu $I \equiv (r_1, r_2)$ takovém, že pro všechny poloměry $r \in I$ křivka w neprochází počátkem je funkce p spojitá.

Odtud plyne, že pro alespoň jeden poloměr prochází křivka w počátkem a odtud plyne tvrzení základní věty algebry.