# Stereografická projekce

20. prosince 2024

Obrázek ke stereografické projekci najdete v [JV-UKP], poznámka 1.2.3. Odvodíme vztahy v poznámce uvedené. Body $A = [0,0,1]$, $B = [x_1, x_2, x_3]$ $C = [x, y, 0]$ leží na přímce. Bod $B$ navíc na sféře: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Parametrické rovnice přímky $AC$

$$\begin{aligned} x_1 &= t\,x \\ x_2 &= t\,y \\ x_3 &= 1 - t \end{aligned} \tag{1}$$

dosadíme do rovnice sféry

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = 1$$

Po úpravě dostaneme

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) = 2t$$

a odtud vypočteme $t$

$$t = 0, \text{ nebo } t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

První kořen odpovídá bodu $A$, druhý sférické projekci. Dosazením $t$ do (1) dosteneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ x_2 &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ x_3 &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned}$$

Odvodíme jeden možný tvar inverzních vztahů (není to jediná možnost, protože $x_1$, $x_2$, $x_3$ jsou na sobě závislé). Z (1) vyjádříme

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{t} \\ y &= \frac{x_2}{t} \\ t &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

Dosazením $t$ ze třetího vztahu do prvních dvou dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{1-x_3} \\ y &= \frac{x_2}{1-x_3} \end{aligned}$$

V komplexním oboru můžeme zapsat jedním vztahem

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$$

**Otočení okolo osy $x_3$.**

Souřadnice otočeného bodu označíme $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = x_3$$

Bod $[x_1, x_2', x_3']$ se stereografickou projekcí zobrazí na bod $z' = x' + iy'$ v Gaussově rovině. Postupným dosazováním dostaneme

$$x' = \frac{x_1'}{1-x_3'} = \frac{-x_1}{1-x_3} = \frac{-\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}$$

a po úpravě

$$\frac{-\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} = \frac{-2x}{x^2+y^2+1-(x^2+y^2-1)} = -x$$

Podobně spočítáme $y' = -y$ a odtud dostaneme $z' = -z$.

**Otočení okolo osy $x_2$.**

Souřadnice otočeného bodu označíme $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = -x_3$$

Spočítáme $x'$ postupným dosazováním

$$x' = \frac{x_1'}{1-x_3'} = \frac{-x_1}{1+x_3} = \frac{-\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{1+\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}$$

a po úpravě

$$\frac{-\frac{2x}{x^2+y^2+1}}{1+\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} = \frac{-2x}{x^2+y^2+1+x^2+y^2-1} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Podobně spočítáme $y' = y/(x^2+y^2)$ a odtud dostaneme

$$z' = x' + iy' = \frac{-x+iy}{x^2+y^2} = \frac{-\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{-1}{z}$$

**Otočení okolo osy $x_1$.**

Analogickým výpočtem dostaneme $z' = 1/z$.