Transcendentní funkce komplexní proměnné

1. listopadu 2024

Funkce exp, sin, cos definujeme pomocí Taylorových řad.

$$
\begin{aligned}
\exp(z) &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} && (1)\\
\sin(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} && (2)\\
\cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} && (3)
\end{aligned}
$$

Tyto řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$. Z lokálně stejnoměrné konvergence řad plyne, že součty řad (1), (2), (3) jsou spojité funkce.

Z lokálně stejnoměrné konvergence derivací řad člen po členu plyne možnost derivovat řady člen po členu, tj. druhá, červeně vyznačená, rovnost v každém řádku (ostatní jsou úpravy)

$$
\begin{aligned}
\exp'(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\\
&= \exp(z)\\
\sin'(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}\\
&= \cos(z)\\
\cos'(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1}\\
&= -\sin(z)
\end{aligned}
$$

Eulerův vztah. Dosazením iz za z do (1) dostaneme po malých úpravách Eulerův vztah

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

K úpravě

$$\exp(x + iy) = \exp(x)\,(\cos(y) + i\sin(y))$$

potřebujeme ukázat

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Důkazem této rovnosti pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se budeme zabývat v dalším.

Aplikace věty o holomorfní funkci – jednoznačnost komplexního prodloužení. Chceme ukázat, že $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ platí i v komplexním oboru. Začneme jednodušším vztahem, ukážeme, že v komplexním oboru platí $\exp(2z) = (\exp(z))^2$.

Uvažujme nyní funkci $f(z) = \exp(2z) - (\exp(z))^2$. Pro $z \in \mathbb{R}$ je $f(z) = 0$. Zvolme $z_0 \in \mathbb{R}$. Pak pro $k \in \mathbb{N}$ je $f^{(k)}(z_0) = 0$. Dále má f na $\mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné $f'(z)$.

Odtud a z věty o holomorfní funkci plyne $f(z) = T(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$ a odtud plyne $\exp(2z) = (\exp(z))^2$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Dokažme nyní platnost $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Uvažujme nejdříve pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $f_x(z) = \exp(x + z) - \exp(x)\exp(z)$. Z věty o holomorfní funkci dostaneme $f_x(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$. A odtud plyne $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ pro $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{C}$.

Dále uvažujme tuto funkci $f_x(z) = \exp(x + z) - \exp(x)\exp(z)$ tentokrát pro $x \in \mathbb{C}$. Z předchozího a věty o holomorfní funkci dostaneme

$$\forall x, z \in \mathbb{C} : \exp(x + z) - \exp(x)\exp(z) = 0$$

a odtud

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

Z výše uvedeného odvodíme pro $z = x + iy$

$$\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

Další vztahy. První dva dostaneme dosazením $-z$ za z do (3), případně (2). Třetí je Eulerův vztah, čtvrtý a další plynou z prvních tří.

$$\begin{aligned}
\cos(-z) &= \cos(z) \\
\sin(-z) &= -\sin(z) \\
\exp(iz) &= \cos(z) + i\sin(z) \\
\exp(-iz) &= \cos(z) - i\sin(z) \\
\exp(iz) + \exp(-iz) &= 2\cos(z) \\
\exp(iz) - \exp(-iz) &= 2i\sin(z) \\
\cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\
\sin(z) &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}
\end{aligned}$$

Pomocí funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus přepíšeme poslední dva vztahy do tvaru

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \cosh(iz)\\ \sin(z) &= -i\sinh(iz)\end{aligned}$$

Úloha. Řešte rovnice

$$\begin{aligned}\exp(z) &= 4-3i\\ \sin(z) &= 2\\ \sin(z) &= 3i\\ \cos(z) &= 3\\ \cos(z) &= 5i\end{aligned}$$

Návod. V exponenciální rovnici položíme $w = u + iv$, $z = x + iy$ a upravíme $\exp(w)$ v rovnici $\exp(w) = z$

$$\exp(u + iv) = \exp(u)(\cos(v) + i\sin(v)) = x + iy$$

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned}\exp(u) &= |z|\\ u &= \log|z|\\ v &\in \operatorname{Arg}(z)\end{aligned}$$

Goniometrické rovnice převedeme vzorci nahoře na exponenciální rovnice.

Definice logaritmu. Pro $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definujeme a logaritmus jako vícehodnotovou funkci

$$\operatorname{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} : z = \exp(w)\}$$

hlavní hodnotu logaritmu definujeme

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

Rozmyslete si, že platí

$$\operatorname{Log}(z) = \{\log(z) + 2ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$