Písemná část zkoušky z předmětu UKPX/UKAM
23. prosince 2022

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Pečlivě čtěte zadání. Vypočtěte a zobrazte je něco jiného než zobrazte (v tom případě máte v průběhu výpočtu odmocňovat „nehezké“ číslo a není nutné počítat jeho argument, stačí ho zakreslit).

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Pokud máte ke zkoušce vypracovaný tahák, odevzdejte jej také.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 80%.

1a Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

1b Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ platí $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

1c Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

1d Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

1e Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ platí $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

1f Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1g Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Vypočtěte kořeny rovnic v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.
   (a) $(z+2)^3 = -i$
   (b) $z^2 + iz = 2$

3a Zobrazte v komplexní rovině kořeny rovnice

$$z^2 + (1-2i)z - 2 = 0$$

3b

$$z^2 + iz - 2 + i = 0$$

4a Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+3i$. Poté zkonstruujte obraz jejich podílu a porovnejte jeho polohu s vypočtenou hodnotou.

4b Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ a číslo $z = z_1/(z_1 + z_2)$. Číslo z zobrazte dvěma způsoby: konstrukcí z obrazů čísel z_1, z_2 a výpočtem. Oba výsledky porovnejte.

5. Vypočtěte poměr bodů $z_1 = 1$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 1 + 2i$ a z tohoto poměru vypočtěte velikost úhlu s vrcholem v bodě z_1 a s rameny procházejícími body z_2, z_3. Body poté zobrazte v komplexní rovině a vypočtený úhel porovnejte s obrázkem.

6a Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $z_1 = 2$ na bod $w_1 = 2 + 2i$ a bod $z_2 = -1 + i$ na bod $w_2 = 3i$. Vypočtěte koeficient tohoto podobného zobrazení. Typem podobného zobrazení myslíme posunutí, otočení, stejnohehlost případně stejnolehlost složenou s otočením.

6b

$$z_1 = i, w_1 = -1, \quad z_2 = 2, w_2 = 2 + i$$

7a Načrtněte množiny komplexních čísel

(a) $\{z \in \mathbb{C} : (2 + i)z + (1 + i)\overline{z} = 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} + (2 - 3i)z + (2 + 3i)\overline{z} + 4 = 0\}$

7b Načrtněte množiny komplexních čísel

(a) $\{z \in \mathbb{C} : (2 + i)z + (2 - i)\overline{z} = 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} + 2z - 2\overline{z} = 1 + 8i\}$

8a Zjistěte, zda funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky $f(z) = \exp(z^2)$

8b $f(z) = z \exp(z)$

8c $f(z) = \overline{z} \exp(z)$

8d $f(z) = z \exp(\overline{z})$

8e $f(z) = \sin(z)$

9a Vypočtěte kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

$$\sin(z) = 3$$

9b

$$\sin(z) = 3i$$

9c

$$\cos(z) = 2i$$

9d

$$\cos(z) = 2$$

9e

$$\exp(2iz - 1) = 5$$

10a Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady. Kruh konvergence mocninné řady zakreslete do komplexní roviny.

$$\sum \frac{k^2 + k + 1}{2^k}(z-2)^k$$

10b

$$\sum \frac{(k!)^2 3^k}{(2k)! 4^k}(z+1)^k$$

11. Sečtěte řadu a určete její kruh konvergence. Vypočtěte derivaci $f'(z)$ a vyjádřete ji ve tvaru mocninné řady.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^k$$

12* Z tohoto příkladu jsme udělali žolíka pro ty z vás, kteří buď rádi derivují, nebo si zopakují méně pracný postup z analýzy 3.
Napište Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě nula, vyčíslete alespoň čtyři její nenulové koeficienty.

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 3z + 2}$$