

Limita složené funkce

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
13. ledna 2015

1. Úvod. Cílem textu je vysvětlit aplikaci věty o limitě složené funkce ([JV] 4.4.1.), tedy pro $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a zadanou složenou funkci $f \circ g$ výpočet limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)).$$

Obtížné na této větě je ověření předpokladů, tedy zjištění, zda je možné v konkrétním případě použít tvrzení (závěr) věty. Samotné tvrzení tak obtížné není. Lze ho chápat jako substituci při výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \ell} f(y), \quad \text{kde } \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1)$$

Prvním krokem je určení existence a hodnoty limity vnitřní funkce. Pokud limita

$$\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

existuje, rozhodneme o možnosti aplikace (1) podle chování funkce f v okolí bodu ℓ .

2. Za prvé můžeme větu použít, je-li funkce f v bodě ℓ spojitá. V tomto případě navíc limitu po substituci (1) vypočteme dosazením

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

3. Za druhé můžeme větu použít, pokud existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 , na němž funkce g nenabývá hodnoty ℓ . Tato situace nastává skoro ve všech „praktických“ případech. Vyjmenujme je

- $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$,
- funkce g je v levém i pravém okolí ryze mnotonní.

4. Příklady. Nejdříve pár jednoduchých příkladů na ukázkou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2^{\arccotg x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 2^y = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \cos(\arctg(\frac{1}{x-1})) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \cos(\arctg(y)) = \lim_{z \rightarrow \pi/2^-} \cos(z) = 0.$$

Na závěr několik těžších – na nich si můžete ověřit, zda limitě složené funkce rozumíte.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\sin^2 x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\operatorname{sgn} x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x^2 \sin^2 \frac{1}{x})$$