Učební text k předmětu Seminář z matematiky pro studenty Fakulty strojní TUL

Budeme řešit nerovnici
$$x - 1 \geq \frac{2x+2}{x+4}$$
a uvedeme celkem tři způsoby řešení.
První, co vás pravděpodobně napadne, je roznásobit nerovnici výrazem $x + 4$. V tom případě ale musíme diskutovat tři případy

1. v případě $x + 4 > 0$ dostaneme
$$(x-1)(x+4) \geq 2x + 2$$
2. v případě $x + 4 = 0$ nemá původní nerovnice smysl
3. v případě $x + 4 < 0$
$$(x-1)(x+4) \leq 2x + 2.$$

Vyřešením nerovnice dostaneme v jednotlivých případech (podrobnosti vynechávám, protože předpokládám, že kvadratickou nerovnici řešit umíte.)

1. $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty)$
3. $x \in \langle -3, 2\rangle$

Po zohlednění podmínek $x > -4$ a $x < -4$ dosteneme

1. $x \in (-4, -3\rangle \cup \langle 2, \infty)$
3. na tomto intervalu nemá nerovnice řešení

Výsledné řešení je
$$x \in (-4, -3\rangle \cup \langle 2, \infty)$$
Chceme-li se vyhnout výše uvedené diskusi $x < -4 \times x > -4$, převedeme vše na jednu stranu nerovnice
$$x - 1 - \frac{2x+2}{x+4} \geq 0,$$
postupně upravíme
$$\frac{(x-1)(x+4) - (2x+2)}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-6}{x+4} \geq 0,$$

čitatele rozložíme na součin kořenových činitelů

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x+4} \geq 0.$$

Nyní nulovými body -3, 2, -4 rozdělíme množinu reálných čísel na části

$$(-\infty,-4) \qquad \{-4\} \qquad (-4,-3) \qquad \{-3\} \qquad (-3,2) \qquad \{2\} \qquad (2,\infty)$$

1. Na intervalu $(-\infty, -4)$ jsou všechny výrazy ($x{+}3$, $x{-}2$, $x{+}4$) záporné, a tedy i celý zlomek je záporný.

2. Pro $x = -4$ nemá nerovnice smysl.

3. Na $(-4, -3)$ je $x + 3$ a $x - 2$ záporné a $x + 4$ kladné, celý zlomek je tedy kladný.

4. Pro $x = -3$ je zlomek nulový.

5. Na $(-3, 2)$ je $x + 3$ kladné, $x - 2$ záporné, $x + 4$ kladné, celý zlomek je tedy záporný.

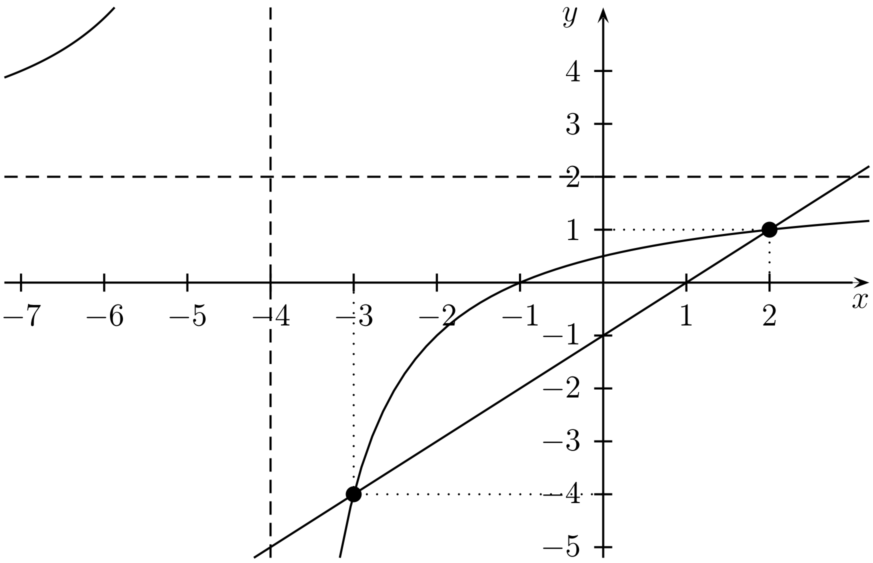
6. Pro $x = 2$ je zlomek nulový.

7. Na $(2, \infty)$ jsou všechny výrazy $x + 3$, $x - 2$ a $x + 4$ kladné, celý zlomek je tedy kladný.

Výše uvedená diskuse dává řešení nerovnice

$$(-4,-3\rangle \cup \langle 2,\infty).$$

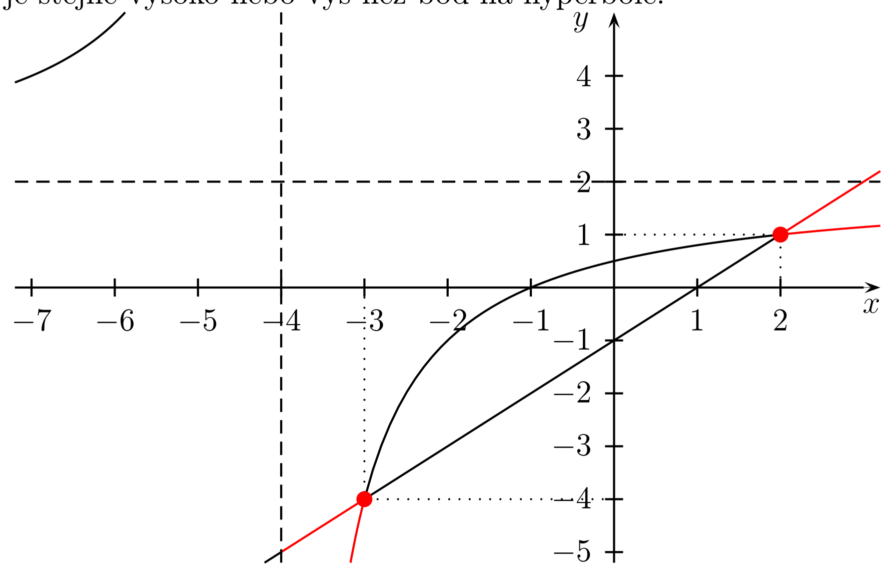
Třetí způsob řešení, který předvedeme, je grafický. Do jednoho obrázku načrtneme grafy pravé a levé strany nerovnice. Průsečíky grafů získáme vyřešením rovnice (to vynecháme).



Řešíme nerovnici

$$x - 1 \geq \frac{2x+2}{x+4},$$

hledáme tedy x, pro něž je $x-1$ větší nebo rovno $\frac{2x+2}{x+4}$, tedy bod na přímce je stejně vysoko nebo výš než bod na hyperbole.



Výsledkem je sjednocení intervalů $(-4, -3\rangle$, $\langle 2, \infty)$.