ÚLOHY PRO PŘÍPRAVU NA DRUHÝ TEST PŘEDMĚTU SEMINÁŘ Z MATEMATIKY

1. Stavová rovnice ideálního plynu obsahuje stavové hodnoty: tlak plynu p, objem plynu V, absolutní teplotu plynu T, počtu molů plynu n a plynovou konstantu R a má tvar: $pV = nRT$. Převeďte tuto rovnici na tvar obsahující tlak a teplotu v počátečním stavu (p_0, T_0) a v koncovém stavu (p, T) a dále obsahující hustotu plynu v počátečním a koncovém stavu (ϱ_0, ϱ).
   Pro kontrolu a další odkazy: jeden z možných tvarů výsledku je
$$\varrho T/p = \varrho_0 T_0/p_0 \tag{1}$$

2. Z Poissonovy stavové rovnice izoentropického (vratně adiabatického) děje pro $\kappa = 1.4$
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} \tag{2}$$
   vyjádřete hustotu ϱ pomocí počáteční hustoty ϱ_0 a počátečního a koncového tlaku p_0, p.

3. Ze stavové rovnice (1) a Poissonovy rovnice (2) odvoďte vztah pro změnu tlaku a teploty (tedy z rovnic eliminujte hustoty ϱ_0, ϱ).
   Pro další odkazy a pro kontrolu uvádíme jeden z možných tvarů výsledku
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \tag{3}$$

4. Z Poissonovy rovnice (3), (2) vyjádřete teplotu T pomocí počáteční teploty T_0 a hustot ϱ, ϱ_0.

5. Aerodynamická rovnice tlaku při izentropickém proudění ideálního plynu má tvar
$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right]^{\kappa/(1-\kappa)}$$
   (a) Vypočtěte z rovnice tlak p_0, nejdříve obecně a poté pro hodnoty $p = 100kPa$, $\kappa = 1.4$ a Machovo číslo $M = 2.2$.
   (b) Z rovnice vyjádřete Machovo číslo M a poté ho vyčíslete pro $\kappa = 1.4$ a tlaky $p = 100kPa$, $p_0 = 150kPa$.

6a Z následujících vztahů vyjádřete a, x. Nejdříve obecně a poté pro $n = 3$, $b = y = 2$.

$$(a^2/b)^n = b^{2n-1}, \qquad x^{1-1/n} = y^{2n}$$

6b Nejdříve obecně, poté pro $n = 2/3$, $b = 3$, $y = 4$.

$$a^{4n+2} = (ab)^{n-1}, \qquad (xy)^{2-n} = (x/y)^{3n}$$

6c Nejdříve obecně, poté pro $n = 1/2$, $b = 2$, $y = 9$.

$$(ab)^{n+1} = (a/b^2)^{n/2}, \qquad x^n = (xy^2)^{n-1}$$

7a Řešte rovnici s neznámou x a parametrem a. Pro jaké hodnoty $a \in \mathbb{R}$ má rovnice řešení?

$$\frac{1-2x}{x+4} = a$$

7b

$$\frac{6x+2}{2x-1} = a$$

7c

$$\frac{4x-5}{2x+3} = a$$

8a Určete, které číslo je větší, aniž byste je vyčíslili. Vysvětlete, jak jste k výsledku došli. Své argumenty můžete například podpořit náčrtkem grafu, nebo tím, že určitá funkce je na určitém intervalu rostoucí/klesající.

(a) $A_1 = \log\left(\frac{25}{26}\right)^2, \quad A_2 = 0$

(b) $B_1 = 2^{1-\pi/2}, \quad B_2 = 1$

(c) $C_1 = 0.5^{1-\pi/2}, \quad C_2 = 1$

(d) $D_1 = \cos 1, \quad D_2 = \cos 3$

8b (a) $A_1 = \cos 20°, \quad A_2 = \cos 30°$

(b) $B_1 = \sin 100°, \quad B_2 = \cos 30°$

(c) $C_1 = 2^{-\sin 100°}, \quad C_2 = 2^{-\cos 30°}$

(d) $D_1 = \log(\pi/4), \quad D_2 = 0$

8c (a) $A_1 = \cos 1, \quad A_2 = \cos 2$

(b) $B_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 1}}, \quad B_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 2}}$

(c) $C_1 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 1}}, \quad C_2 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 2}}$

(d) $D_1 = \left(\frac{32}{39}\right)^2, \quad D_2 = 1$

9a Níže vidíte tabulku obsahující naměřené hodnoty vybraných vlastností vody. Tyto vlastnosti se mění s teplotou a tabulka obsahuje hodnoty jen pro vybrané teploty.

Metodou lineární interpolace vypočtěte hustotu vody ($\varrho[kgm^{-3}]$) při tlaku $100kPa$ a teplotě $43°C$.

2.4 Vlastnosti vody při tlaku 0,1 MPa

t $[°C]$	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	c_p $\left[\frac{J}{kg\cdot K}\right]$	λ $\left[\frac{W}{m\cdot K}\right]$	$10^6\cdot\nu$ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	$10^3\cdot\eta$ $[Pa\cdot s]$	$10^3\cdot\gamma$ $\left[\frac{1}{K}\right]$	Pr $[-]$
0	999,9	4 225,7	0,558	1,794	1,793 6	-0,07	13,57
5	1000,0	4 206,5	0,567	1,535	1,534 7	0,015	11,35
10	999,7	4 194,7	0,577	1,297	1,296 4	0,090	9,42
15	999,1	4 186,8	0,587	1,137	1,135 6	0,154	8,10
20	998,2	4 181,7	0,597	0,995	0,993 4	0,208	6,97
25	997,1	4 178,4	0,606	0,883	0,880 6	0,256	6,08
30	995,7	4 176,3	0,615	0,796	0,792 4	0,302	5,38
35	994,1	4 175,5	0,624	0,724	0,719 8	0,344	4,81
40	992,3	4 175,5	0,633	0,663	0,658 0	0,386	4,34
45	990,2	4 176,3	0,639	0,611	0,605 1	0,422	3,94
50	988,1	4 177,6	0,647	0,562	0,555 0	0,457	3,58
55	985,7	4 179,3	0,652	0,517	0,509 9	0,490	3,27
60	983,2	4 181,6	0,658	0,480	0,471 7	0,522	2,99
65	980,6	4 183,9	0,663	0,444	0,435 4	0,554	2,74
70	977,8	4 186,8	0,667	0,413	0,404 0	0,584	2,53
75	974,9	4 190,1	0,651	0,386	0,376 6	0,614	2,35
80	971,8	4 193,9	0,673	0,362	0,352 0	0,642	2,19
85	968,7	4 197,7	0,676	0,339	0,328 1	0,670	2,04
90	965,3	4 201,9	0,678	0,320	0,308 9	0,697	1,91
95	961,9	4 206,0	0,680	0,304	0,292 2	0,723	1,80
100	958,4	4 210,7	0,681	0,290	0,277 5	0,749	1,72

9b Metodou lineární interpolace vypočtěte měrné teplo při konstantním tlaku ($c_p[Jkg^{-1}K^{-1}]$) při tlaku $100kPa$ a teplotě $51°C$.

10a Napište obecnou rovnici přímky[1] procházející body $A = [2, 1]$, $B = [-1, 3]$ a proveďte zkoušku.

10b,c,d,... Zvolte dva body v rovině s celočíselnými souřadnicemi, napište obecnou rovnici přímky procházející těmito body a proveďte zkoušku.

11a Napište směrnicovou rovnici přímky[2] procházející body $A = [2, 1]$, $B = [-1, 3]$ a proveďte zkoušku.

11b,c,d,... Zvolte dva body v rovině s celočíselnými souřadnicemi, napište směrnicovou rovnici přímky procházející těmito body a proveďte zkoušku.

[1] Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$, případně $ax + by = d$.

[2] Směrnicová rovnice přímky má tvar $y = ax + b$.

11z Pro jakou dvojici bodů není možné rovnici přímky převést do směrnicového tvaru?

12a,b,c,... Přímku z příkladu 1 načrtněte/narýsujte v soustavě souřadné. Z obecné rovnice přímky $ax + by + c = 0$ vytvořte vektor $\vec{v} = (a, b)$ a umístěte ho v soustavě do bodu A.

13a Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A a je kolmá na přímku AB, kde $A = [3, -1]$, $B = [2, 4]$.

13b,c,d,... Body A, B zvolte jejich celočíselnými souřadnicemi.

14a Určete střed a poloměr kružnice a načrtněte ji. Rovnice kružnice je

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y = 0$$

14b

$$x^2 - 5x + y^2 = 0$$

14c

$$x^2 + x + y^2 + 4y = 0$$

14d

$$x^2 + 4x + y^2 - y = 0$$

15a Načrtněte graf funkce f a z grafu určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = a$ alespoň jeden kořen a pro které má právě jeden kořen.

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

15b

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

15c

$$f(x) = x^2 + 2x - 2$$