ÚLOHY PRO PŘÍPRAVU NA DRUHÝ TEST PŘEDMĚTU SEMINÁŘ Z MATEMATIKY

Cíle: Student/studentka umí ze vztahu mezi proměnnými vybranou proměnnou vyjádřit jako funkci ostatních proměnných – umí to pro výrazy obsahující zlomky a mocniny.

Umí načrtnout grafy goniometrických, exponenciálních a logaritmických funkcí a z těchto grafů umí odečítat funkční hodnoty. V úlohách 7 až 9 si zopakujete práci s grafy funkcí a čtení informací z těchto grafů.

Umí načrtnout grafy lineární, lineárně lomené a kvadratické funkce a ví, jak se graf změní, je-li tento výraz v absolutní hodnotě.

Zná směrnicovou a obcnou rovnici přímky a pro dva zadané body přímky umí oba tyto tvary odvodit.

Ví, co je lineární interpolace, ví, jak souvisí s přímkou a rovnicí přímky a tyto znalosti umí použít na příkladech.

Umí převádět jednotky a vyřešit příklad s převodem jednotek na přímou úměru.

Poznámka: Úlohy do testu jsou číslovány arabskými čísly. Úlohy číslované římskými čísly pro testy určeny nejsou, jsou to motivační úlohy propojující odborné strojařské předměty s matematikou.

I. *Stavová rovnice ideálního plynu obsahuje stavové hodnoty: tlak plynu p, objem plynu V, absolutní teplotu plynu T, počtu molů plynu n a plynovou konstantu R a má tvar: $pV = nRT$. Převeďte tuto rovnici na tvar obsahující tlak a teplotu v počátečním stavu (p_0, T_0) a v koncovém stavu (p, T) a dále obsahující hustotu plynu v počátečním a koncovém stavu (ϱ_0, ϱ).*
Pro kontrolu a další odkazy: jeden z možných tvarů výsledku je

$$\varrho T/p = \varrho_0 T_0/p_0 \tag{1}$$

II. *Z Poissonovy stavové rovnice izoentropického (vratně adiabatického) děje pro $\kappa = 1.4$*

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} \tag{2}$$

vyjádřete hustotu ϱ pomocí počáteční hustoty ϱ_0 a počátečního a koncového tlaku p_0, p.

III. *Ze stavové rovnice (1) a Poissonovy rovnice (2) odvoďte vztah pro změnu tlaku a teploty (tedy z rovnic eliminujte hustoty ϱ_0, ϱ).*

Pro další odkazy a pro kontrolu uvádíme jeden z možných tvarů výsledku

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \tag{3}$$

IV. *Z Poissonovy rovnice (3), (2) vyjádřete teplotu T pomocí počáteční teploty T_0 a hustot ϱ, ϱ_0.*

V. *Aerodynamická rovnice tlaku při izentropickém proudění ideálního plynu má tvar*

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right]^{\kappa/(1-\kappa)}$$

(a) *Vypočtěte z rovnice tlak p_0, nejdříve obecně a poté pro hodnoty $p = 100kPa$, $\kappa = 1.4$ a Machovo číslo $M = 2.2$.*

(b) *Z rovnice vyjádřete Machovo číslo M a poté ho vyčíslete pro $\kappa = 1.4$ a tlaky $p = 100kPa$, $p_0 = 150kPa$.*

6a Z následujících vztahů vyjádřete kladné hodnoty a, x. Nejdříve obecně a poté pro $n = 3$, $b = y = 2$.

$$(a^2/b)^n = b^{2n-1}, \qquad x^{1-1/n} = y^{2n}$$

6b Nejdříve obecně, poté pro $n = 2/3$, $b = 3$, $y = 4$.

$$a^{4n+2} = (ab)^{n-1}, \qquad (xy)^{2-n} = (x/y)^{3n}$$

6c Nejdříve obecně, poté pro $n = 1/2$, $b = 2$, $y = 9$.

$$(ab)^{n+1} = (a/b^2)^{n/2}, \qquad x^n = (xy^2)^{n-1}$$

6d Nejdříve obecně, poté pro $n = 1/3$, $b = 3$, $y = 2$.

$$(a^2b)^{2n-1} = (a/b)^{n+2}, \qquad (x/y)^{n+1} = x^{2n-1}$$

7a Načrtněte graf funkce f. Vyjádřete funkci k f inverzní a i její graf načrtněte.

$$f : y = \frac{1 - 2x}{x + 4}$$

7b

$$f : y = \frac{6x + 2}{2x - 1}$$

7c

$$f : y = \frac{4x - 5}{2x + 3}$$

8a Ze vztahu vyjádřete proměnnou B jako funkci proměnných x, A, C, D.

$$x = A\frac{B + C}{D - BC}$$

8b Proměnnou x jako funkci proměnné y

$$y = \frac{6x + 2}{2x - 1}$$

8c Proměnnou B jako funkci proměnných A, C

$$A = \frac{B - C}{B + 2C}$$

8d Proměnnou C jako funkci proměnných A, B

$$A = \frac{B - C}{B + 2C}$$

8e Proměnnou A jako funkci proměnných B, C

$$B = \frac{A + 2C}{3C - A}$$

8f Proměnnou C jako funkci proměnných A, B

$$B = \frac{A + 2C}{3C - A}$$

9a (a) Načrtněte graf logaritmické funkce a z grafu určete, které z čísel $A_1 = \log\left(\frac{25}{26}\right)^2$, $A_2 = 0$ je větší.

(b) Analogicky pro graf funkce $y = 2^x$ a čísla $B_1 = 2^{1-\pi/2}$, $B_2 = 1$.

(c) Analogicky pro graf funkce kosinus a čísla $C_1 = \cos 1$, $C_2 = \cos 3$.[1]

9b (a) Načrtněte graf funkce $y = 0.5^x$ a z grafu určete, které z čísel $A_1 = 0.5^{4-\pi}$, $A_2 = 1$ je větší.

[1]Nejosu-li uvedené jako jednotky stupně, automaticky uvažujte radiány.

(b) Analogicky pro graf funkce sinus a čísla $B_1 = \sin 100°$, $B_2 = \sin 120°$

(c) Analogicky pro graf funkce tangens a čísla $C_1 = \mathrm{tg}\, 20°$, $C_2 = \mathrm{tg}\, 30°$.

9c (a) Načrtněte graf funkce kotangens a z grafu určete, které z čísel $A_1 = \mathrm{cotg}\, 80°$, $A_2 = \mathrm{cotg}\, 30°$ je větší.

(b) Analogicky pro graf logaritmické funkce a čísla $B_1 = \log(\pi/4)$, $B_2 = 0$.

(c) Analogicky pro graf funkce sinus a čísla $C_1 = \sin 3$, $C_2 = \sin 4$.

10a Načrtněte grafy funkcí

$$f(x) = 2 - x^2, \quad g(x) = |f(x)|, \quad h(x) = \frac{1}{x-3} + 2, \quad k(x) = |h(x)|$$

10b Načrtněte grafy funkcí

$$f(x) = (x+2)^2 - 3, \quad g(x) = |f(x)|, \quad h(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad k(x) = |h(x)|$$

10c Načrtněte grafy funkcí

$$f(x) = (x-3)^2 - 1, \quad g(x) = |f(x)|, \quad h(x) = \frac{1}{x+1}, \quad k(x) = |h(x)|$$

11a Níže vidíte tabulku obsahující naměřené hodnoty vybraných vlastností vody. Tyto vlastnosti se mění s teplotou a tabulka obsahuje hodnoty jen pro vybrané teploty.

Metodou lineární interpolace vypočtěte hustotu vody ($\varrho[kgm^{-3}]$) při tlaku $100kPa$ a teplotě $43°C$.

2.4 Vlastnosti vody při tlaku 0,1 MPa

t $[°C]$	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	c_p $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$	λ $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$	$10^6 \cdot \nu$ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$	$10^3 \cdot \eta$ $[Pa \cdot s]$	$10^3 \cdot \gamma$ $\left[\frac{1}{K}\right]$	Pr $[-]$
0	999,9	4 225,7	0,558	1,794	1,793 6	-0,07	13,57
5	1000,0	4 206,5	0,567	1,535	1,534 7	0,015	11,35
10	999,7	4 194,7	0,577	1,297	1,296 4	0,090	9,42
15	999,1	4 186,8	0,587	1,137	1,135 6	0,154	8,10
20	998,2	4 181,7	0,597	0,995	0,993 4	0,208	6,97
25	997,1	4 178,4	0,606	0,883	0,880 6	0,256	6,08
30	995,7	4 176,3	0,615	0,796	0,792 4	0,302	5,38
35	994,1	4 175,5	0,624	0,724	0,719 8	0,344	4,81
40	992,3	4 175,5	0,633	0,663	0,658 0	0,386	4,34
45	990,2	4 176,3	0,639	0,611	0,605 1	0,422	3,94
50	988,1	4 177,6	0,647	0,562	0,555 0	0,457	3,58
55	985,7	4 179,3	0,652	0,517	0,509 9	0,490	3,27
60	983,2	4 181,6	0,658	0,480	0,471 7	0,522	2,99
65	980,6	4 183,9	0,663	0,444	0,435 4	0,554	2,74
70	977,8	4 186,8	0,667	0,413	0,404 0	0,584	2,53
75	974,9	4 190,1	0,651	0,386	0,376 6	0,614	2,35
80	971,8	4 193,9	0,673	0,362	0,352 0	0,642	2,19
85	968,7	4 197,7	0,676	0,339	0,328 1	0,670	2,04
90	965,3	4 201,9	0,678	0,320	0,308 9	0,697	1,91
95	961,9	4 206,0	0,680	0,304	0,292 2	0,723	1,80
100	958,4	4 210,7	0,681	0,290	0,277 5	0,749	1,72

11b Metodou lineární interpolace vypočtěte měrné teplo při konstantním tlaku ($c_p[Jkg^{-1}K^{-1}]$) při tlaku $100kPa$ a teplotě $51°C$.

12a Představte si jednoduchý experiment se zahradní hadicí. Abychom mohli spočítat průměrný objemový průtok vody hadicí v metrech krychlových za minutu (m^3/min), změříme čas, za který se zcela naplní nádoba o známém objemu. Objem nádoby je $V = 4l$ a naplnit nádobu zcela vodou trvalo $t = 45s$. Vypočtěte průměrný objemový průtok hadicí.

12b $V = 20dl$ (decilitry), $t = 30s$

12c $V = 500cm^3$, $t = 90s$

13a Napište obecnou rovnici přímky[2] procházející body $A = [2, 1]$, $B = [-1, 3]$ a proveďte zkoušku.

13b,c,d,... Zvolte dva body v rovině s celočíselnými souřadnicemi, napište obecnou rovnici přímky procházející těmito body a proveďte zkoušku.

14a Napište směrnicovou rovnici přímky[3] procházející body $A = [2, 1]$, $B = [-1, 3]$ a proveďte zkoušku.

14b,c,d,... Zvolte dva body v rovině s celočíselnými souřadnicemi, napište směrnicovou rovnici přímky procházející těmito body a proveďte zkoušku.

[2] Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$, případně $ax + by = d$.

[3] Směrnicová rovnice přímky má tvar $y = ax + b$.

14z Pro jakou dvojici bodů není možné rovnici přímky převést do směrnicového tvaru?

15a,b,c,... Přímku z příkladu 1 načrtněte/narýsujte v soustavě souřadné. Z obecné rovnice přímky $ax + by + c = 0$ vytvořte vektor $\vec{v} = (a, b)$ a umístěte ho v soustavě do bodu A.

16a Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A a je kolmá na přímku AB, kde $A = [3, -1]$, $B = [2, 4]$.

16b,c,d,... Body A, B zvolte jejich celočíselnými souřadnicemi.