ÚLOHY PRO PŘÍPRAVU NA TŘETÍ TEST PŘEDMĚTU SEMINÁŘ Z MATEMATIKY

Cíle:

Student/studentka spočítá skalární a vektorový součin dvou vektorů, zná jejich geometrický význam a ví, jak je použít k výpočtům vzdáleností rovin, přímek, bodů v rovině i prostoru.

Spočítá průsečík přímek v rovině a průsečík přímky s rovinou v prostoru.

Ze zadaných parametrických rovnic křivky spočítá tečný vektor a vektor normály ke křivce a k prostorové křivce navíc vektor binormály.

Spočítá poloměr oskulační kružnice, souřadnice středu této kružnice. U rovinných křivek napíše rovnici oskulační kružnice a vypočtený střed a poloměr oskulační kružnice zkontroluje s nakreslenou křivkou.

Poznámka: Úlohy do testu jsou číslovány arabskými čísly. Úlohy číslované římskými čísly pro testy určeny nejsou, jsou to motivační úlohy propojující odborné strojařské předměty s matematikou.

I. *Síla $\vec{F}$ je dána svými složkami F_x, F_y, F_z. Působí v bodě $A[x_A, y_A, z_A]$. Osa o prochází bodem $B[x_B, y_B, z_B]$ a je skloněná pod směrovými úhly α_o, β_o, γ_o. Vypočtěte moment síly $\vec{F}$ k ose o, je-li dáno:*

$$\vec{F}(60, 80, 100)N, \quad A[2, 8, 7]m, \quad B[7, 3, 6]m, \quad o(108, 18, \gamma_o \leq 90)^\circ.$$

2a Pro vektory $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (1, -3)$ vypočtěte vektor $\vec{b}_\parallel$, který je průmětem vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$ a vektor $\vec{b}_\perp$, který je průmětem vektoru $\vec{b}$ do směru kolmého k vektoru $\vec{a}$. Výpočet zkontrolujte náčrtkem všech čtyř vektorů a dále ověřte, že platí

(a) $\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$

(b) Vektory $\vec{b}_\parallel$, $\vec{b}_\perp$ jsou vzájemně kolmé, tj. platí $\vec{b}_\parallel \cdot \vec{b}_\perp = 0$.

(c) Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}_\perp$ jsou vzájemně kolmé.

(d) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}_\perp\|$ (zde $|$ značí absolutní hodnotu a $\|$ velikost vektoru)

(e) $\vec{a} \cdot \vec{b}_\parallel = \vec{a} \cdot \vec{b}$
$\vec{a} \cdot \vec{b}_\perp = 0$

3a Stejná úloha jako předchozí, ale ve 3D. Vektor $\vec{b}_\perp$ je průmětem do směru v rovině určené vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ kolmého k $\vec{a}$. V (d) bude místo absolutní hodnoty velikost vektoru $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

$$\vec{a} = (2, 0, 1), \qquad \vec{b} = (-4, 2, 3)$$

4a Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC. Situaci narýsujte, vzdálenost změřte a porovnejte s odhadem číselné hodnoty výsledku[1].

$$A[2,0], \quad B[-1,0], \quad C[0,1]$$

4b

$$A[0,0], \quad B[5,2], \quad C[1,-1]$$

5a Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky p. Situaci narýsujte, vzdálenost změřte a porovnejte s odhadem číselné hodnoty výsledku[2].

$$A[5,-2], \quad p: x-y=4$$

5b

$$A[5,-1], \quad p: 3x-4y=24$$

6a Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky BC. Výsledek nevyčíslujte, nechte ho ve tvaru odmocniny.

$$A[2,0,1], \quad B[-1,0,3], \quad C[1,1,1]$$

6b

$$A[0,1,-2], \quad B[2,3,-1], \quad C[2,1,1]$$

7a Vypočtěte vydálenost přímky AB od přímky CD. Výsledek nevyčíslujte, nechte ho ve tvaru odmocniny.

$$A[2,0,2], \quad B[2,0,4], \quad C[0,5,1], \quad D[0,3,1]$$

7b

$$A[0,0,0], \quad B[2,-3,0], \quad C[-2,-2,0], \quad D[0,0,1]$$

8a Vypočtěte průsečík přímky AB s přímkou p. Výsledek zkontrolujte náčrtkem přímek.

$$A[2,4], \quad B[-2,0], \quad p: 3x-y=6$$

8b

$$A[3,-1], \quad B[2,1], \quad p: 2x-y+1=0$$

[1] Uvažujte $\sqrt{2} \doteq 1.4$

[2] Opět uvažujte $\sqrt{2} \doteq 1.4$

9a Vypočtěte průsečík přímky AB s rovinou ϱ.

$$A[2,0,3], \quad B[3,-2,0], \quad \varrho : x - 2y + z = 9$$

9b

$$A[0,2,1], \quad B[2,0,2], \quad \varrho : x + y + 2z = 8$$

10a Vypočtěte souřadnice normály roviny ABC.

$$A[2,1,0], \quad B[5,1,3], \quad C[2,0,4]$$

10b

$$A[1,0,3], \quad B[4,2,2], \quad C[3,1,0]$$

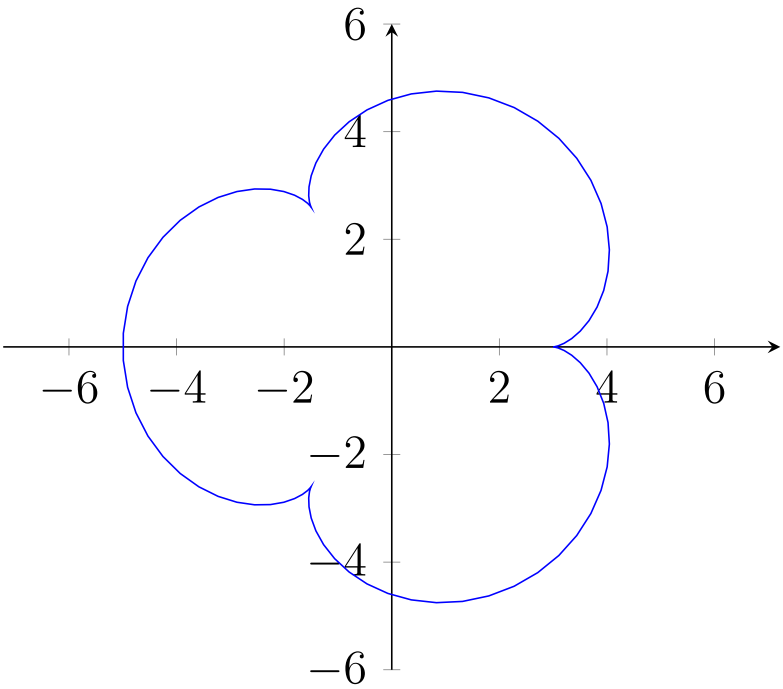
11a Na obrázku je hypocykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (4\cos(t) - \cos(4t), 4\sin(t) - \sin(4t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-4\sin(t) + 4\sin(4t), 4\cos(t) - 4\cos(4t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-4\cos(t) + 16\cos(4t), -4\sin(t) + 16\sin(4t))\end{aligned}$$

Vypočtěte součadnice bodu $B = \vec{r}(\pi/2)$. V bodě B vypočtěte tečný a normálový vektor k hypocykloidě. Orientaci normálového vektoru zvolte stejnou, jako má dostředivé zrychlení. Bod B, tečný a normálový vektor zakreslete do obrázku.



12a Vypočtěte poloměr oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B.

13a Vypočtěte střed S oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B. Zakreslete střed S do obrázku.

14a Napište rovnici oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B.

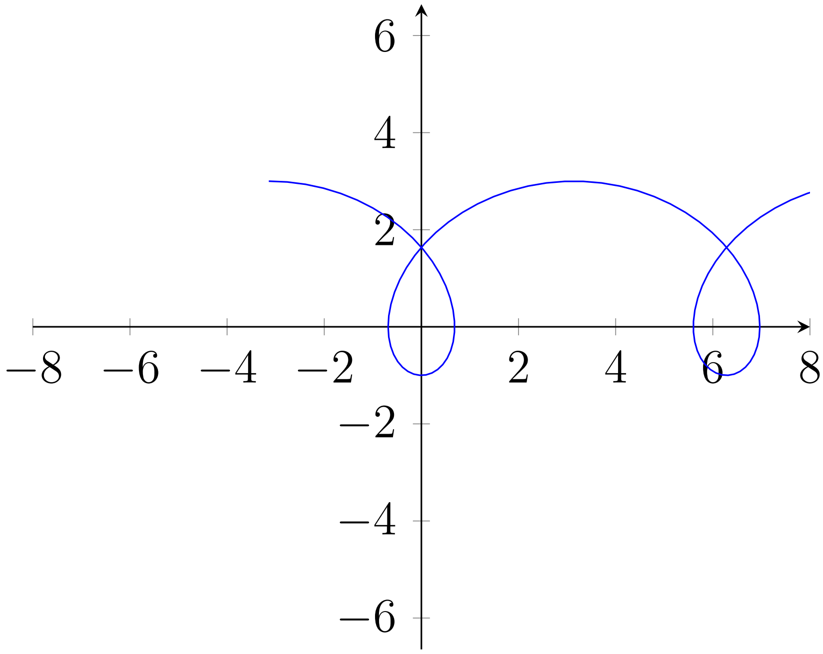
11-14b Na obrázku je cykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t - 2\sin(t), 1 - 2\cos(t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (1 - 2\cos(t), 2\sin(t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (2\sin(t), 2\cos(t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro cykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



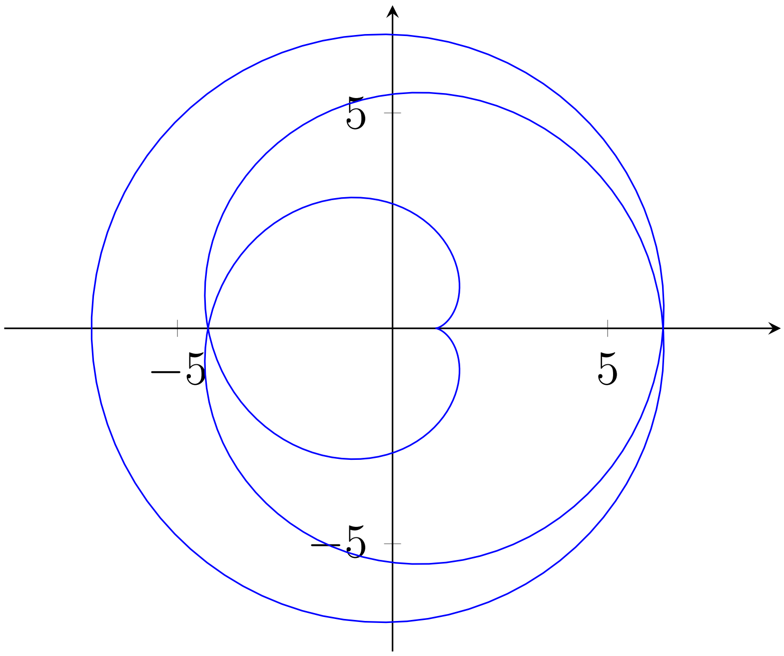
11-14c Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (4\cos(3t) - 3\cos(4t), 4\sin(3t) - 3\sin(4t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-12\sin(3t) + 12\sin(4t), 12\cos(3t) - 12\cos(4t))\\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-36\cos(3t) + 48\cos(4t), -36\sin(3t) + 48\sin(4t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



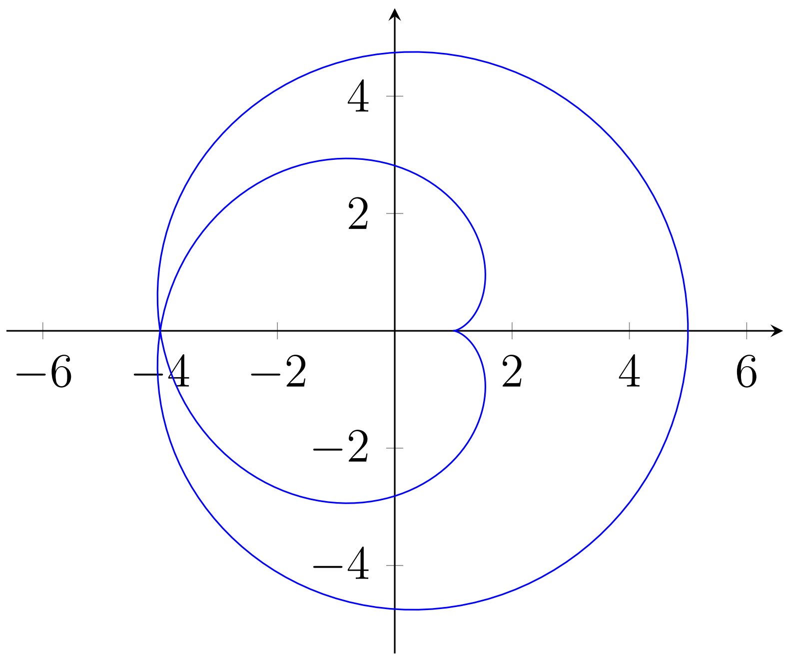
11-14d Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3\cos(2t) - 2\cos(3t), 3\sin(2t) - 2\sin(3t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-6\sin(2t) + 6\sin(3t), 6\cos(2t) - 6\cos(3t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-12\cos(2t) + 18\cos(3t), -12\sin(2t) + 18\sin(3t)) \end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



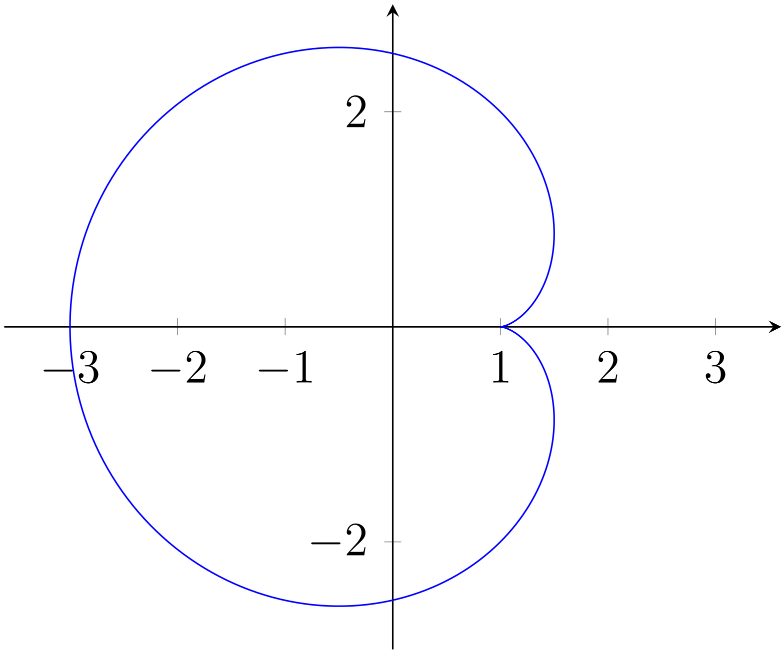
11-14e Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-2\sin(t) + 2\sin(2t), 2\cos(t) - 2\cos(2t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-2\cos(t) + 4\cos(2t), -2\sin(t) + 4\sin(2t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



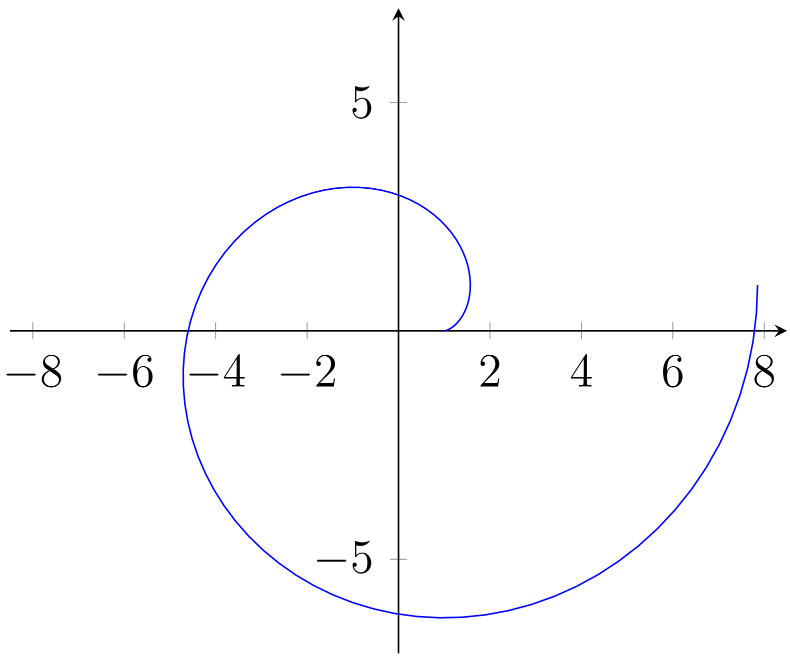
11-14f Na obrázku je evolventa o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (t\cos(t), t\sin(t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro evolventu a bod $B = \vec{r}(\pi)$.



15a Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 3t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 3)\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-2\cos(t), -2\sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtěte souřadnice bodu $B = \vec{r}(\pi/2)$ a poloměr oskulační kružnice v bodě B.

15b Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 4)\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3\cos(t), -3\sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtěte souřadnice bodu $B = \vec{r}(3\pi)$ a poloměr oskulační kružnice v bodě B.

16a Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 4)\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3\cos(t), -3\sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtěte (jednotkový) tečný vektor a (jednotkové) vektory normály a binormály v bodě $B = \vec{r}(2\pi)$.

16b Prostorová spirála má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3\cos(t), 3\sin(t), e^{-2t})$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3\sin(t), 3\cos(t), -2e^{-2t})\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3\cos(t), -3\sin(t), 4e^{-2t})\end{aligned}$$

Vypočtěte vektor normály v bodě $B = \vec{r}(0)$. Uveďte jakýkoliv nenulový násobek tohoto normálového vektoru, nemusíte ho normovat na jednotkovou velikost.