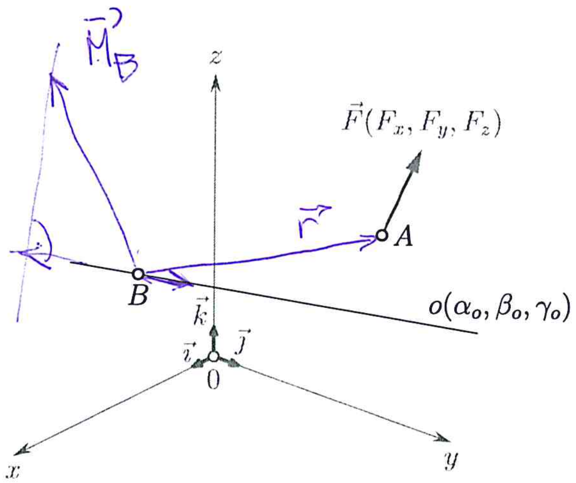
Příklad 2 Síla $\vec{F}$ je dána svými složkami F_x, F_y, F_z. Působí v bodě $A\,[x_A, y_A, z_A]$. Osa o prochází bodem $B\,[x_B, y_B, z_B]$ a je skloněná pod směrovými úhly α_o, β_o, γ_o. Vypočtěte moment síly $\vec{F}$ k ose o, je-li dáno: $\vec{F}\,(60, 80, 100)$ N, $A\,[2, 8, 7]$ m, $B\,[7, 3, 6]$ m, $o(108, 18, \gamma_o \leq 90)°$.



Obr. 4

Řešení: Podle níže uvedeného vztahu dopočítáme hodnotu směrového úhlu γ_o osy o, kterou budeme později potřebovat.

$$\cos^2\alpha_o + \cos^2\beta_o + \cos^2\gamma_o = 1,$$

odtud

$$\begin{aligned}\cos\gamma_o &= \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha_o - \cos^2\beta_o} = \\ &= \pm\sqrt{1 - \cos^2 108 - \cos^2 18} = 0.\end{aligned}$$

Jelikož z definice je směrový úhel osy uvažován jako dutý, tedy z intervalu $\langle 0, 180\rangle°$, připadá v úvahu pro $\cos\gamma_o = 0$ jediné možné řešení, a to $\gamma_o = 90°$, což mimochodem znamená, že osa o je rovnoběžná s rovinou (x, y) souřadnicového systému. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu momentu síly $\vec{F}$ k ose o. Nejprve stanovíme moment síly $\vec{F}$ k libovolnému bodu osy o, tedy např. k bodu B. Ramenem síly je zde vektor $\vec{r}_{BA}$. Podle obr. 5 jej můžeme vyjádřit z vektorové rovnice (3), ve které je jedinou neznámou

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}, \tag{3}$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B)\,\vec{\imath} + (y_A - y_B)\,\vec{\jmath} + (z_A - z_B)\,\vec{k}.$$

Moment síly $\vec{F}$ k bodu B tedy je

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{\imath}\,[(y_A - y_B)\,F_z - (z_A - z_B)\,F_y] - \vec{\jmath}\,[(x_A - x_B)\,F_z - (z_A - z_B)\,F_x] + \\
&\quad + \vec{k}\,[(x_A - x_B)\,F_y - (y_A - y_B)\,F_x] = \\
&= \vec{\imath}\,[(8-3)\cdot 100 - (7-6)\cdot 80] - \vec{\jmath}\,[(2-7)\cdot 100 - (7-6)\cdot(60)] + \\
&\quad + \vec{k}\,[(2-7)\cdot 80 - (8-3)\cdot 60] = \\
&= (420\,\vec{\imath} + 560\,\vec{\jmath} - 700\,\vec{k})\ \text{Nm}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že moment $\vec{M}_B$ je tedy dán třemi složkami $\vec{M}_{Bx} = 420\,\vec{\imath}$ Nm, $\vec{M}_{By} = 560\,\vec{\jmath}$ Nm a $\vec{M}_{Bz} = -700\,\vec{k}$ Nm, což jsou jeho průměty do os x, y, z. Složku momentu $\vec{M}_B$ v ose o zjistíme jeho promítnutím do osy o, což provedeme skalárním součinem

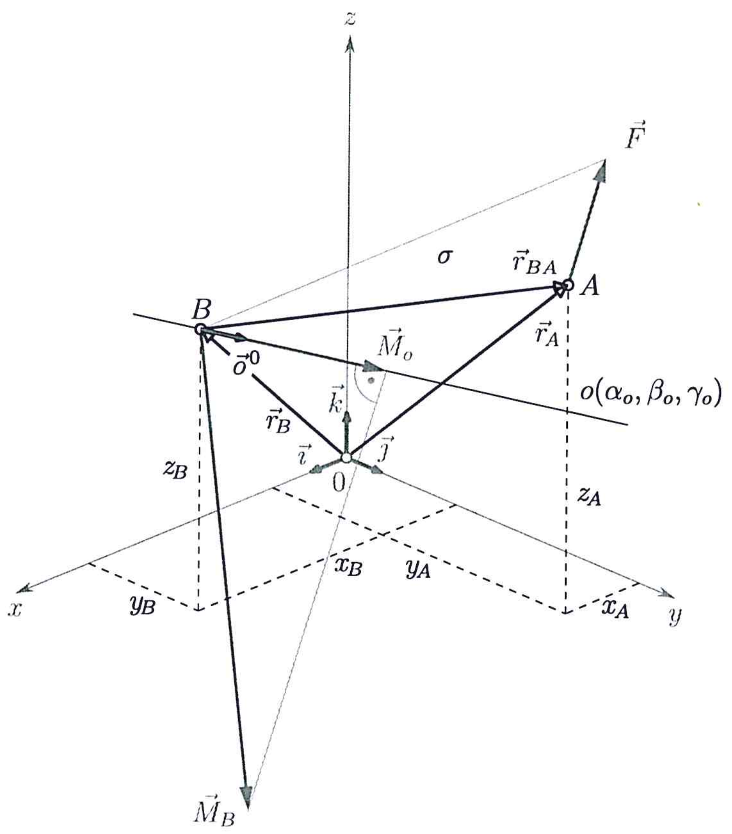
$$M_o = \vec{M}_B \cdot \vec{o}^{\,0}, \tag{4}$$

kde $\vec{o}^0$ je jednotkový vektor osy o. Jeho složky jsou rovny cosinům směrových úhlů osy o, tedy $\vec{o}^0 = \cos\alpha_o \vec{\imath} + \cos\beta_o \vec{\jmath} + \cos\gamma_o \vec{k}$. Potom

$$\begin{aligned} M_o &= (M_{Bx}, M_{By}, M_{Bz}) \cdot (\cos\alpha_o, \cos\beta_o, \cos\gamma_o) = \\ &= M_{Bx}\cos\alpha_o + M_{By}\cos\beta_o + M_{Bz}\cos\gamma_o = \\ &= 420 \cdot \cos 108 + 560 \cdot \cos 18 - 700 \cdot \cos 90 = 402{,}80 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Jelikož moment síly $\vec{F}$ kolem osy o je taktéž vektor a má směr této osy, vytvoříme ze skalární hodnoty M_o vektor tak, že ji přenásobíne jednotkovým vektorem $\vec{o}^o$. Skalární hodnota M_o tak získá vektorové vlastnosti jednotkového vektoru $\vec{o}^o$. Nulová velikost z-ové složky momentu M_o je opět důsledkem rovnoběžnosti osy o s rovinou (x, y).

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= M_o \cdot \vec{o}^0 = M_o(\cos\alpha_o \vec{\imath} + \cos\beta_o \vec{\jmath} + \cos\gamma_o \vec{k}) = \\ &= M_o \cos\alpha_o \vec{\imath} + M_o \cos\beta_o \vec{\jmath} + M_o \cos\gamma_o \vec{k} = \\ &= 402{,}80 \cdot \cos 108 \vec{\imath} + 402{,}80 \cdot \cos 18 \vec{\jmath} + 402{,}80 \cdot \cos 90 \vec{k}) = \\ &= (-124{,}47 \vec{\imath} + 383{,}09 \vec{\jmath} + 0 \vec{k}) \text{ Nm}. \end{aligned}$$



Obr. 5