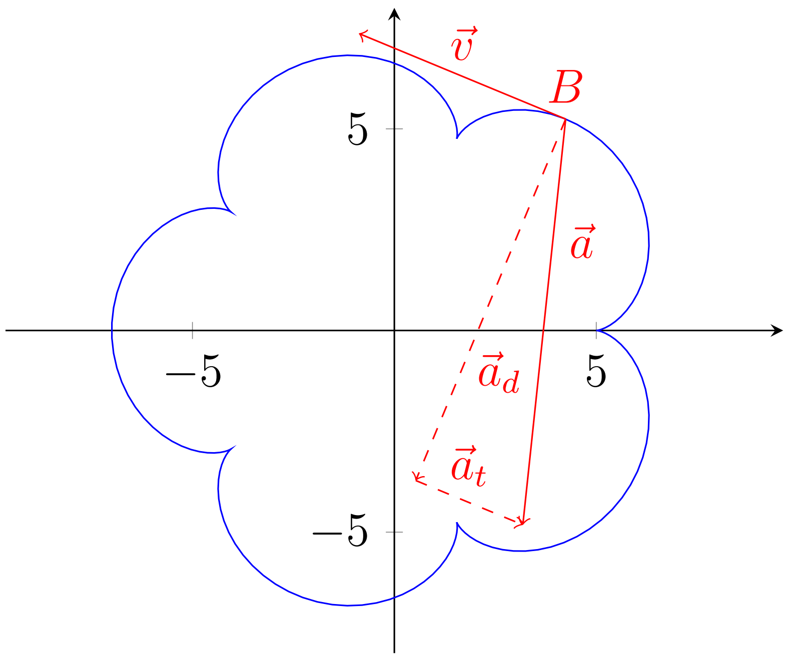
Oskulační kružnice

Bod B se pohybuje po hypocykloidě, viz obrázek. Na obrázku je vyznačena okamžitá rychlost bodu B a okamžité zrychlení. Rychlost $\vec{v}$ je tečná k hypocykloidě, zrychlení $\vec{a}$ má obecný směr.

Zrychlení $\vec{a}$ rozložíme na tečnou a normálovou složku a budeme je nazývat tečným a dostředivým zrychlením.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_d$$



Tečné zrychlení $\vec{a}_t$ má směr stejný jako rychlost a způsobuje změnu velikosti rychlosti $\|\vec{v}\|$. V tomto případě mají $\vec{a}_t$, $\vec{v}$ opačnou orientaci, což znamená, že velikost rychlosti $\|\vec{v}\|$ se při pohybu zmenšuje.

Dostředivé zrychlení $\vec{a}_d$ má směr kolmý k rychlosti $\vec{v}$ a způsobuje změnu směru rychlosti. Pokud by bylo tečné zrychleni nulové, pohyboval by se bod po kružnici. Tuto kružnici nazýváme *oskulační kružnicí* v daném bodě křivky.

Z mechaniky rovnoměrného kruhového pohybu známe vztah mezi rychlostí, zrychlením a poloměrem R

$$R\|\vec{a}_d\| = \|\vec{v}\|^2$$

Odtud spočítáme poloměr oskulační kružnice

$$R = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{a}_d\|} \tag{1}$$

V případě nulového jmenovatele $\|\vec{a}_d\| = 0$ se oskulační kružnice stává přímkou a poloměr je $R = \infty$. Touto přímkou je tečna ke křivce.

Dostředivé zrychlení $\vec{a}_d$ získáme jako kolmý průmět zrychlení $\vec{a}$ do směru kolmého k rychlosti $\vec{v}$. Připomeňme, že velikost tohoto průmětu lze spočítat pomocí vektorového součinu

$$\|\vec{a}_d\| = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \tag{2}$$

Z (1), (2) dostaneme po dosazení a úpravě

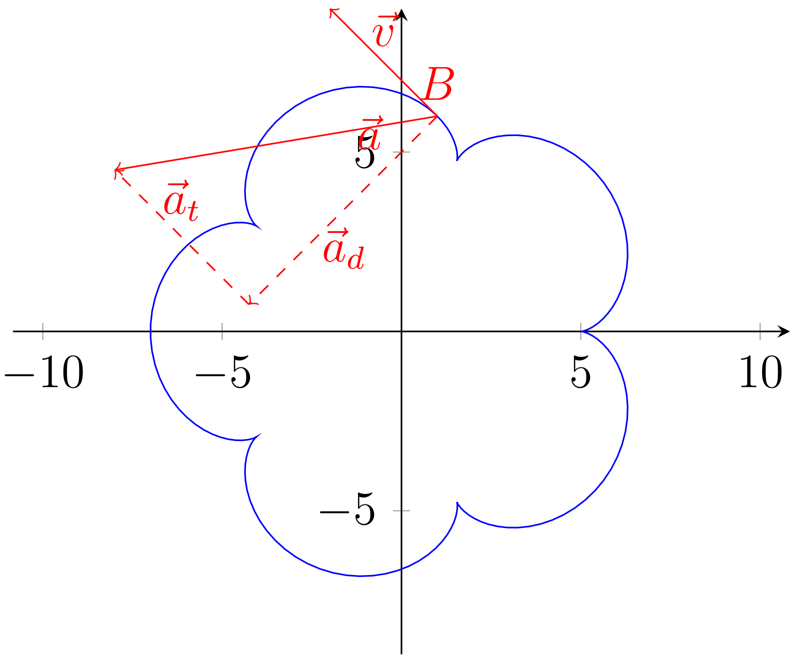
$$R = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|} \tag{3}$$

Převrácenou hodnotu poloměru oskulační kružnice nazýváme křivostí křivky v bodě B

$$\text{křivost} = \frac{1}{R} = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|^3} \tag{4}$$

PŘÍKLAD. Hypocykloida, jejíž graf je na začátku dokumentu má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (6\cos(t/2) - \cos(3t),\ 6\sin(t/2) - \sin(3t)) \tag{5}$$



K výpočtu zvolíme bod odpovídající parametru $t = \pi$

$$B = [1, 6]$$

Rychlost v obecném bodě je rovna derivaci

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-3\sin(t/2) + 3\sin(3t),\ 3\cos(t/2) - 3\cos(3t)) \tag{6}$$

Dosazením $t = \pi$ dostaneme

$$\vec{v} = (-3, 3)$$

Zrychlení v obecném bodě je rovna druhé derivaci

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (-3\cos(t/2)/2 + 9\cos(3t),\ -3\sin(t/2)/2 + 9\sin(3t))$$

Dosazením $t = \pi$ dostaneme

$$\vec{a} = (-9, -3/2)$$

K výpočtu poloměru křivosti použijeme vzorec (3). Pro dosazení do tohoto vzorce spočítáme

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= 3\sqrt{2} \\ \vec{v} \times \vec{a} &= \frac{63}{2} \end{aligned}$$

Dosazením do (3) dostaneme

$$R = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

Protože $\sqrt{2} \doteq 1.4$, je $R \doteq 2.4j$.

Abychom napsali rovnici oskulační kružnice, potřebujeme spočítat souřadnice jejího středu S. Víme, že směr $\vec{BS}$ je kolmý na rychlost $\vec{v}$ a známe jeho velikost $\|\vec{BS}\| = R$.

Nejdříve určíme vektor kolmý na $\vec{v}$. Dvěma z nich jsou $(1, 1)$, $(-1, -1)$, z obrázku určíme orientaci a vybereme $(-1, -1)$. D8le tento vektor vydělíme jeho velikostí, která je $\|(-1, -1)\| = \sqrt{2}$ a vynárobíme vzdáleností B od S.

$$\vec{BS} = \frac{12\sqrt{2}}{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{12}{7}, -\frac{12}{7}\right)$$

Vektor $\vec{BS}$ použijeme k výpočtu souřadnic středu S

$$S = B + \vec{BS} = [1, 6] + \left(-\frac{12}{7}, -\frac{12}{7}\right) = \left[-\frac{5}{7}, \frac{30}{7}\right]$$

a střed S a poloměr R dosadíme do rovnice kružnice

$$\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{30}{7}\right)^2 = \frac{288}{49}$$