Skalární součin

Skalární součin je zobrazení, které dvojici vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ přiřadí číslo $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

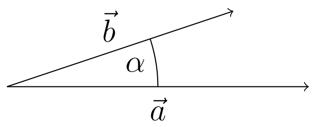
Vlastnosti

1. Pozitivita: $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$, přitom rovnost platí právě když je $\vec{a}$ nulový vektor.
2. Symetrie (komutativní zákon): $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
3. Distributivní zákon: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
4. „Asociativní“ zákon: $(t\vec{a})\cdot\vec{b} = t(\vec{a}\cdot\vec{b})$ pro $t\in\mathbb{R}$

Poznámka: vlastnosti 3, 4 nazýváme *linearitou skalárního součinu*. Nebo též *bilinearitou*, protože jsou splněny i pro druhý argument skalárního součinu: $\vec{a}\cdot(t\vec{b}+s\vec{c}) = t\vec{a}\cdot\vec{b}+s\vec{a}\cdot\vec{c}$, pro $t,s\in\mathbb{R}$.

Výpočet ve 2D

1. Známe-li kartézské souřadnice vektorů $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, je
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$
2. Velikost vektoru $\vec{a}=(a_1,a_2)$ je
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$$
3. Známe-li velikosti vektorů a úhel α , který svírají, je
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\alpha) \tag{1}$$



Výpočet ve 3D je obdobný

1. Známe-li kartézské souřadnice vektorů $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, je
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
2. Velikost vektoru $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ je
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

3. Geometrický vzorec je stejný jako ve 2D

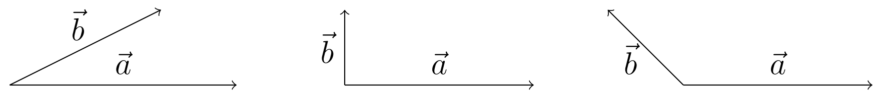
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos(\alpha) \tag{2}$$

Znaménko skalárního součinu

Uvažujme nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ze vzorce (2) plyne, že znaménko skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ závisí na znaménku kosinu úhlu, který vektory svírají.

Pro ostrý úhel, je $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, pro kolmé vektory, je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ a pro tupý úhel, je $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



Změna velikosti vektoru

Ukážeme, jak k nenulovému vektoru $\vec{a}$ získáme vektor stejného směru, ale jiné velikosti. Začneme výpočtem jednotkového vektoru. Vektory

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \qquad \vec{c} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

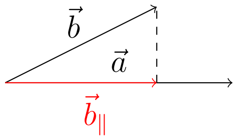
mají velikost rovnu jedné, mají stejný směr jako vektor $\vec{a}$. Vektor $\vec{b}$ má stejnou orientaci jako $\vec{a}$, v $\vec{c}$ má orientaci opačnou.

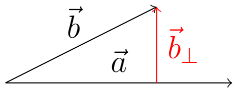
V textu o oskulační kružnici potřebujeme k vektoru $\vec{n}$ získat vektor stejného směru a orientace a o velikosti R. Získáme ho vynásobením jednotkového vektoru velikostí R.

$$\frac{R}{\|\vec{n}\|}\vec{n} \tag{3}$$

Kolmý průmět vektoru

Pro dvojici vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ chceme sestrojit kolmé průměty jednoho z vektorů do směrů určených druhým vektorem. Na obrázku vlevo je znázorněn průmět $\vec{b}_{\|}$ vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$. Na obrázku vpravo je znázorněn průmět $\vec{b}_{\perp}$ vektoru $\vec{b}$ do směru kolmého k vektoru $\vec{a}$.





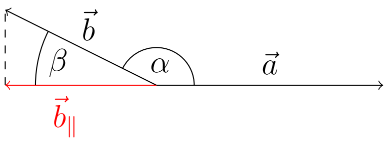
Vektory $\vec{b}_{\|}$, $\vec{b}_{\perp}$ vypočteme pomocí skalárního součinu ze vztahů

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\|} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,\vec{a} && (4) \\ \vec{b}_{\perp} &= \vec{b} - \vec{b}_{\|} && (5) \end{aligned}$$

Pokud nás zajímají jen velikosti průmětů $\vec{b}_{\|}$, $\vec{b}_{\perp}$, vypočteme je z pravoúhlého trojúhelníku

$$\begin{aligned} \|\vec{b}_{\|}\| &= \|\vec{b}\||\cos(\alpha)|, && (6) \\ \|\vec{b}_{\perp}\| &= \|\vec{b}\|\sin(\alpha) && (7) \end{aligned}$$

Úhel vektorů leží v intervalu $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$. Obrázek ukazuje případ, kdy je $\alpha > \pi/2$, a $\cos(\alpha)$ je záporný.



Pomocí sklaárního součinu (1), (2) vyjádříme velikost vektoru $\|\vec{b}_{\|}\|$ v (6) vztahem

$$\|\vec{b}_{\|}\| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|}, \tag{8}$$

velikost $\|\vec{b}_{\perp}\|$ vyjádříme později pomocí vektorového součinu v (10).

Vektorový součin

Vektorový součin ve 3D je zobrazení, které dvojici vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ přiřadí vektor $\vec{a} \times \vec{b}$.

Vlastnosti

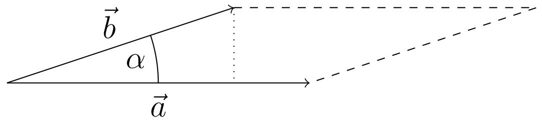
1. Kolmost: vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý na každý z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$.
2. Antisymetrie: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. Linearita: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$
4. Bilinearita: vzhledem k antisymetrii je vektorový součin lineární i vzhledem ke svému druhému argumentu
   $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b})$

Poznámka: ve výpočtech budete používat většinou jen kolmost a antisymetrii. Bilinearitu použijeme v teoretických úvahách, například v motivační úloze o momentu síly vzhledem k ose otáčení.

Výpočet

1. Známe-li kartézské souřadnice vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, je
   $$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$
2. Směr vektoru $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý na každý z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a orientace vektoru $\vec{c}$ je daná pravidlem pravé ruky. Velikost vektorového součinu $\vec{c}$ je rovna součinu velikostí vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a sinu úhlu α, který vektory svírají
   $$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin(\alpha) \qquad (9)$$
   Vektory $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ doplníme na rovnoběžník (viz obrázek níže). Základna rovnoběžníku má velikost $\|\vec{a}\|$ a výška má velikost $\|\vec{b}\| \sin(\alpha)$.

   Velikost vektorového součinu $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ je tedy rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

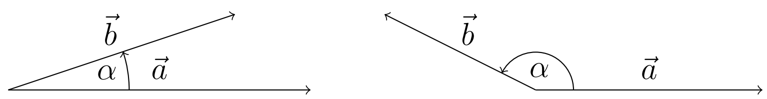


Vektorový součin ve 2D

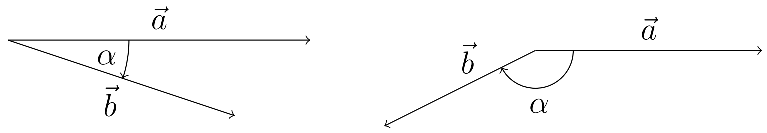
Ve 2D se zpravidla vektorový součin nezavádí, my budeme pro $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ pod symbolem $\vec{a} \times \vec{b}$ rozumět číslo

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ je roven absolutní hodnotě $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Znaménko vektorového součinu je určeno orientací. Kladný, tedy $\vec{a} \times \vec{b} > 0$ je v případech



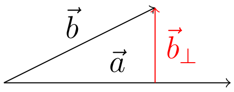
a záporný, tedy $\vec{a} \times \vec{b} < 0$ je v případech



Všimněte si, že úhly jsou orientované od vektoru $\vec{a}$ k vektoru $\vec{b}$ a znaménko souvisí s orientací: kladné orientaci odpovídá kladné znaménko, záporné orientaci znaménko záporné.

Velikost kolmého průmětu vektoru

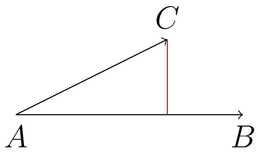
Výše jsme ukázali, jak pomocí skalárního součinu spočítat kolmý průmět vektoru. Zopakujeme zde obrázek



Pokud nás zajímá jen velikost průmětu $\vec{b}_\perp$, dostaneme ze vztahů (7), (9)

$$\|\vec{b}_\perp\| = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \tag{10}$$

Označíme-li krajní body vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, viz obrázek



pak je

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

a vzdálenost bodu C od přímky AB je ve 3D rovna

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Ve 2D nahradíme v čitateli velikost vektoru absolutní hodnotou

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Velikost kolmého průmětu vektoru podruhé

Nechť $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{o}$ (není roven nulovému vektoru). Geometricky to znamená, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou nenulové a neleží na jedné přímce – tvoří tedy rovinu s normálou $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Kolmý průmět vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{n}$ určíme stejně jako ve 2D (viz dříve v textu)

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$$

Velikost vektoru $\vec{v}_{\parallel}$ určíme ze vztahů (1), (6), které zde přepíšeme

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= \|\vec{v}\| \|\vec{n}\| \cos(\alpha) \\ \|\vec{v}_{\parallel}\| &= \|\vec{v}\| |\cos(\alpha)|, \end{aligned}$$

a odvodíme z nich

$$\|\vec{v}_{\parallel}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Vzorec použijeme pro výpočet vzdálenosti mimoběžek AB, CD. Pomocí vektorového součinu určíme směr kolmý k oběma mimoběžkám

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$$

a vzdálenost pak spočítáme jako průmět vektoru $\overrightarrow{AC}$, který spojuje bod A jedné mimoběžek s bodem C ze druhé mimoběžky, do vektoru $\vec{n}$

$$\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{\|\vec{n}\|} \tag{11}$$

Smíšený součin (jen ve 3D)

Smíšený součin tří vektorů je definován

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Vlastnosti

1. Nulovost smíšeného součinu: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ právě když jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanární (leží v jedné rovině).

2. Znaménko smíšeného součinu je dané orientací vektorů. Pro pravotočivou orientaci vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$, pro levotočivou je záporný.

3. Absolutní hodnota smíšeného součinu je rovna objemu rovnoběžnostěnu, jehož hrany tvoří jednotlivé vektory.

4. Z předchozích vlastností plyne, že se smíšený součin nezmění při cyklické záměně vektorů: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

5. Při záměně dvojice vektorů změní smíšený součin znaménko:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \\
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) \\
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})
\end{aligned}$$

   Rozmyslete si, že první vztah plyne z vlastností vektorového a skalárního součinu.

6. Nechť $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$ je rozklad vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ a do směru kolmého.[1]

   Ukážeme, že platí

$$\vec{a}_\perp \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0, \quad \vec{a}_\parallel \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

   Protože vektor $\vec{a}_\perp$ leží v rovině určené vektory $\vec{b}$, $\vec{c}$, plyne první rovnost z podmínky nulovosti smíšeného součinu.

   Z linearity skalárního součinu plyne

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}_\parallel \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a}_\perp \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

   a odtud pak plyne druhý vztah.

Příklad na použití vlastností. Ukážeme, jak se poslední vlastnost projeví ve výpočtu momentu síly vzhledem k ose.

Bod, ve kterém síla $\vec{F}$ působí spolu s osou tvoří rovinu, označme ji ϱ. Sílu $\vec{F}$ rozložíve na vektor $\vec{F}_\perp$ ležící v rovině ϱ (tedy kolmý k normále roviny) a na vektor $\vec{F}_\parallel$ k rovině kolmý (rovnoběžný s normálou). Na otáčení tělesa má vliv jen složka $\vec{F}_\parallel$. Moment síly je roven součinu velikosti $|\vec{F}_\parallel|$ a vzdálenosti působiště síly od osy otáčení.

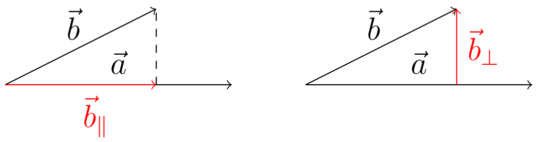
Z vlastností uvedených v tomto textu pak lze odvodit, že moment síly spočítáme jako smíšený součin jednotkového vektoru osy otáčení, „polohového“ vektoru působiště (začíná na některém bodě osy) a vektoru síly.

[1]Viz Kolmý průmět vektoru ve 3D dříve v textu.

Kolmý průmět – odvození

Výše jsme uvedli vztahy (4), (5) na výpočet kolmých průmětů vektoru do daného směru.

V této části textu vztahy odvodíme.



Protože mají vektory $\vec{a}$, $\vec{b}_\parallel$ stejný směr, lze zapsat vektor $\vec{b}_\parallel$ jako násobek vektoru $\vec{a}$, tedy pro vhodné číslo k je

$$\vec{b}_\parallel = k\vec{a} \tag{12}$$

Číslo k je určeno velikostmi vektorů

$$k = \frac{\|\vec{b}_\parallel\|}{\|\vec{a}\|} \tag{13}$$

kosinus úhlu α, který svírají vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ je roven

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{b}_\parallel\|}{\|\vec{b}\|} \tag{14}$$

Odtud dostaneme

$$\|\vec{b}_\parallel\| = \cos(\alpha)\|\vec{b}\|$$

a dosazením do (13) dostaneme

$$k = \frac{\cos(\alpha)\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}$$

V čitateli máme téměř skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, chybí nám jen $\|\vec{a}\|$. Proto tímto výrazem zlomek rozšíříme

$$k = \frac{\cos(\alpha)\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|^2}$$

a vztah přepíšeme pomocí skalárních součinů

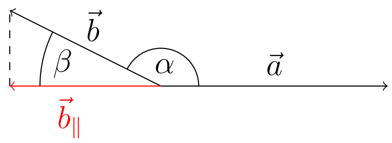
$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Toto k nyní dosadíme do vztahu (12) a dostaneme (4).
Při odvození vzorce (4) jsme předpokládali, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ svírají ostrý úhel.

Vzorec platí i v ostatních případech (tedy pro pravý a tupý úhel). Skalární součin je v případě tupého úhlu záporný a záporné znaménko ve vzorci (4) odpovídá opačné orientaci vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}_{\parallel}$.
Ve vztahu (13) je mínus: $k = -\|\vec{b}_{\parallel}\|/\|\vec{a}\|$ a ve vztahu (14) je místo úhlu α úhel $\beta = \pi - \alpha$. Protože platí

$$\cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

dostaneme, že (14) platí i pro $\alpha > \pi/2$ (případ $\alpha = \pi/2$ necháme čtenáři na rozmyšlenou). A proto vzorec (4) platí pro ostrý, pravý i tupý úhel α.



Vzdálenost mimoběžek – odvození

Výše jsme uvedli vzorec (11) pro vzdálenost mimoběžek.

Jeden ze studentů počítal tuto vzdálenost jinak, uvedeme zde jeho postup a ukážeme, že vede ke stejnému výsledku. Parametrické rovnice přímky AB jsou

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \mathbb{R}$$

a podobně pro přímku CD

$$Y = C + s(D - C), \quad s \in \mathbb{R}$$

Vektor $Y - X$ je příčkou mimoběžek

$$Y - X = C + t(D - C) - A - s(B - A) \tag{15}$$

Vzdálenost měříme na tzv. ose mimoběžek, což je příčka, která je kolmá k oběma přímkám. Kolmost znamená nulovost skalárního součinu, osa mimoběžek tedy splňuje vztahy

$$(Y - X) \cdot (B - A) = 0, \qquad (Y - X) \cdot (D - C) = 0. \tag{16}$$

Z rovnic (16) vypočteme hodnoty parametrů s, t, dosadíme do (15) a vypočteme velikost $\|Y - X\|$, která je rovna vzdálenosti mimoběžek AB, CD.

Ukážeme, že se obejdeme bez výpočtu hodnot parametrů t, s. Odvodíme vzorec pro velikost osy mimoběžek $\|Y - X\|$: Podmínka kolmosti (16) znamená, že vektor $Y - X$ má stejný směr jako vektor $\vec{n}$ (plyne z vlastnosti vektorového součinu)

$$\vec{n} = (B - A) \times (D - C) \tag{17}$$

Velikost osy mimoběžek $\|Y - X\|$ v tom případě vypočteme pomocí skalárního součinu

$$\|Y - X\| = \frac{|\vec{n} \cdot (Y - X)|}{\|\vec{n}\|} \tag{18}$$

Dosaďme nyní do skalárního součinu ze vztahu (15)

$$\vec{n} \cdot (Y - X) = \vec{n} \cdot (C + t(D - C) - A - s(B - A))$$

K úpravě použijeme vlastnosti skalárního součinu, konkrétně bilinearitu

$$\vec{n} \cdot (Y - X) = \vec{n} \cdot (C - A) + t\vec{n} \cdot (D - C) + s\vec{n} \cdot (B - A) \tag{19}$$

Protože skalární součin kolmých vektorů je roven nule

$$\vec{n} \cdot (B - A) = 0, \quad \vec{n} \cdot (D - C) = 0,$$

upravíme (19) na

$$\vec{n} \cdot (Y - X) = \vec{n} \cdot (C - A),$$

dosadíme do (18) a dostaneme vzorec pro vzdálenost mimoběžek

$$\frac{|\vec{n} \cdot (C - A)|}{\|\vec{n}\|}$$