1. Hodina – MA1-E

Pozn.:
Cvičení slouží k počítání příkladů a k udělení zápočtu. Zde uvedené teoretické poznatky slouží jako neformální uvedení do tématu. Teorii ke zkoušce se učte zejména z přednášek.

Úvod, používané symboly a značení, základní pojmy výrokové logiky, Číselné množiny

logická operace	**zápis**	**čteme**	**význam**
negace	$\neg A$	non A	neplatí A
disjunkce	$A \vee B$	A vel B	A nebo B
konjunkce	$A \wedge B$	A et B	A a B (a zároveň)
implikace	$A \Rightarrow B$	A implikuje B	jesliže A, potom B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A je ekvivalentní B	A právě tehdy a jen tehdy, jestliže B

Kvantifikátory

Je-li V predikát obsahující proměnnou x (event. i další), pak výraz

$\exists x\,(V)$ nebo $\exists x : V$ — existuje x tak, že platí V

chápeme jako tvrzení

$\forall x\,(V)$ nebo $\forall x : V$ — pro každé x platí V

Přitom $\exists$ se nazývá ***existenční kvantifikátor***, $\forall$ se nazývá ***všeobecný kvantifikátor***.

Poznamenejme, že ve výrazech s kvantifikátory často uvádíme přímo přípustný obor pro proměnnou; píšeme $\forall x \in M : V(x)$, $\exists x \in M : V(x)$.

Pravdivostní hodnota základních operací:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Negace konjunkce:

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A ∧ B**	**¬A ∨ ¬B**
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

Negace disjunkce:

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A ∨ B**	**¬A ∧ ¬B**
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1

Negace implikace

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A ⇒ B**	**A ∧ ¬B**
1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0

Negace ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$ nebo také $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$$\neg(A \Leftrightarrow B)$$
$$\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$
$$\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

Příklady

A) Základní seznámení s výroky

1. Uveďte příklad jednoduchého výroku, který je „Tautologií“

2. Nechť p znamená „je chladno“ a q „prší“. Vyjádřete slovně následující složené výroky:

   a) $\neg p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $q \vee \neg p$

3. Nechť p znamená „je vysoká“ a q „je hezká“. Zapište symbolicky následující výroky:

   a) Je vysoká a hezká.
   b) Je vysoká, ale není hezká.
   c) Není pravda, že je nevysoká a hezká.
   d) Není ani vysoká, ani hezká.
   e) Je vysoká, nebo je nevysoká a hezká.
   f) Není pravda, že je nevysoká nebo nehezká.

4. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   c) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 5$.
   d) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 5$.

5. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků („nebo“ je zde ve smyslu nevylučovacím):

   a) $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$ b) $2 + 5 = 9$ nebo $3 + 7 = 8$
   c) $1 + 1 = 5$ nebo $3 + 3 = 4$ d) $2 + 5 = 9$ nebo $1 + 7 = 8$

6. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Kodaň je v Dánsku, a $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii, nebo $1 + 1 = 2$ a $3 + 3 = 7$.
   c) Kodaň je v Dánsku, nebo $1 + 5 = 8$ a $3 + 3 = 6$.
   d) Paříž je v Anglii, a $3 + 4 = 7$ nebo $2 + 6 = 8$.

7. Určete, kdy platí výroková formule

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q).$$

8. Ověřte, že:

a) $p \vee \neg(p \wedge q)$ je tautologie,

b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ je kontradikce,

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ je tautologie,

d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

9. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro logickou spojku ∇ – „vylučovací nebo“: $p \nabla q$ znamená „platí p nebo q, ale ne současně“.

B) Kvantifikátory a výroky s čísly

10. Máme zjistit, který z následujících predikátů s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ je pravdivý výrok:

a) $x \leq 2$ b) $\forall x\,(x \leq 2)$ c) $\exists x\,(x \leq 2)$

d) $\forall x\,(x \in (-\infty, 2\rangle \Leftrightarrow x \leq 2)$

11. Nechť $p(x)$ je výraz „$x + 2 > 5$“. Rozhodněte, zda je to výroková funkce; v kladném případě zjistěte, zda následující množiny jsou její přípustné obory:

a) $\mathbb{N}$, b) $M = \{-1, -2, -3, \dots\}$, c) $\mathbb{C}$.

12. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků: (Přípustná množina je $\mathbb{R}$)

a) $\forall x : |x| = x$, b) $\exists x : x^2 = x$, c) $\forall x : x + 1 > x$, d) $\exists x : x + 2 = x$.

13. Utvořte negace předchozích výroků. Snažte se je co nejvíce zjednodušit.

14. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků. Utvořte a co nejvíce zjednodušte jejich negace:

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$, b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$,
c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$, d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$.

15. Utvořte negace výroků:

a) $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, b) $\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$.

Kvantifikátory tedy můžeme řadit za sebou, přičemž na jejich pořadí záleží. Např.
$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, (x^2 = y)$ je jiný výrok než $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}\, (x^2 = y)$
(první je pravdivý, druhý nepravdivý).

16. Máme vyšetřit pravdivost následujících výroků pro reálné proměnné x a y:

a) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$ b) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$

17. Máme vyšetřit pravdivost následujících výroků pro reálné proměnné x a y:

a) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$ b) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$

18. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků s přípustnou množinou $\{1, 2, 3\}$:

a) $\exists x \forall y :\, x^2 < y + 1$, b) $\forall x \exists y :\, x^2 + y^2 < 12$,
c) $\forall x \forall y :\, x^2 + y^2 < 12$,
d) $\exists x \forall y \exists z :\, x^2 + y^2 < 2z^2$, e) $\exists x \exists y \forall z :\, x^2 + y^2 < 2z^2$.

19. Nechť $A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ je přípustná množina pro následující predikáty. Jde-li o výroky, určete pravdivostní hodnotu. Jde-li o výrokové funkce, najděte obor pravdivosti:

a) $\forall x \exists y : x + y < 14$, b) $\forall x \forall y : x + y < 14$,

c) $\forall y : x + y < 14$, d) $\exists y : x + y < 14$.

Řešení některých příkladů

Příklad 7

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Příklad 11

a),b) ano, c) ne;

Příklady 12, 13, 14

a) 0, b) 1, c) 1, d) 0;

a) $\exists x : |x| \neq x$, b) $\forall x : x^2 \neq x$, c) $\exists x : x + 1 \leq x$, d) $\forall x : x + 2 \neq x$;

a) 0; $(\forall x \in A)(x + 3 \neq 10)$, b) 1; $(\exists x \in A)(x + 3 \geq 10)$, c) 1; $(\forall x \in A)(x + 3 \geq 5)$, d) 0; $(\exists x \in A)(x + 3 > 7)$;

Příklad 15

a) $(\exists x : \neg p(x)) \vee (\forall y : \neg q(y))$, b) $(\forall x : \neg p(x)) \wedge (\exists y : \neg q(y))$;

Příklady 18, 19, 20

a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0;

a) 1, b) 0, c) $\{1, 2, 3\}$, d) A;

a) $\forall x \exists y\, (\neg p(x, y))$, b) $\exists x \exists y\, (\neg p(x, y))$, c) $\forall y \forall x \exists z\, (\neg p(x, y, z))$,

d) $\exists x \forall y\, (\neg p(x, y) \wedge \neg q(x, y))$, e) $\forall x \exists y\, (p(x, y) \wedge \neg q(x, y))$, f) $\forall x \forall y\, (\neg p(x, y) \vee q(x, y))$.