10. Hodina – MA1-E

Derivace

5. Derivujte a upravte funkce:

17.) $y = \ln\left(7 + x + x^2\right)$ 18.) $y = \ln\left(\sin x\right) - \ln\left(\cos x\right)$

19.) $y = \ln \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 5}$

6. Derivujte a upravte funkce:

20.) $y = \ln \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$ 21.) $y = \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

22.) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

Úlohy na hledání extrému:

Definice 4.1.1.

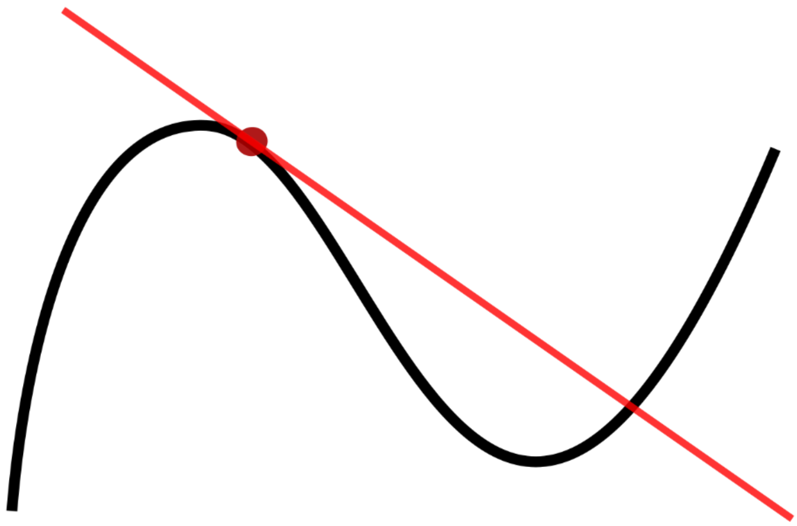
Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D_f$

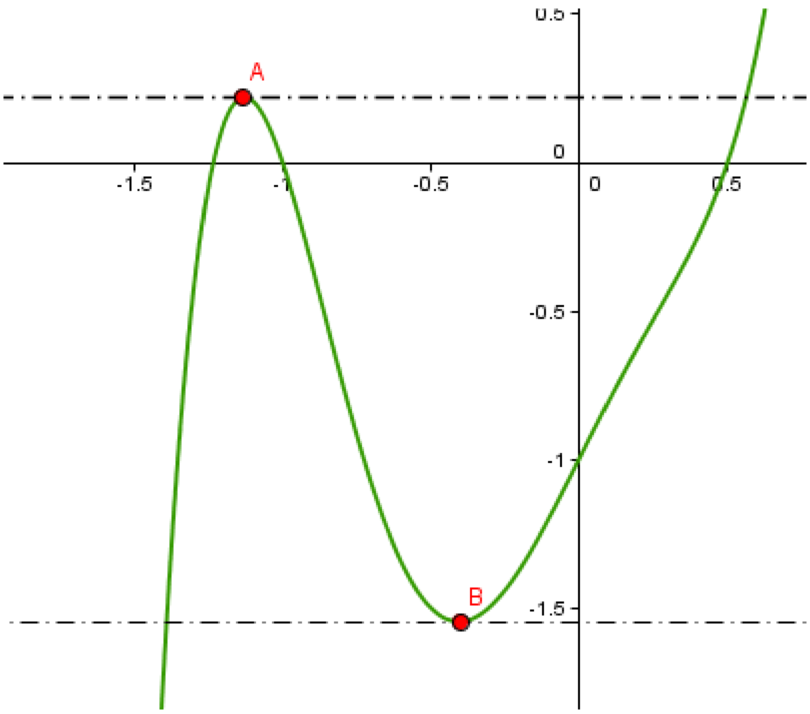
$$\left.\begin{array}{l}\textbf{absolutní maximum}\\ \textbf{absolutní minimum}\\ \textbf{lokální maximum}\\ \textbf{lokální minimum}\\ \textbf{ostré lokální maximum}\\ \textbf{ostré lokální minimum}\end{array}\right\}, \quad \text{jestliže} \quad \begin{cases}\forall x \in D_f : f(x) \le f(x_0),\\ \forall x \in D_f : f(x) \ge f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \Rightarrow f(x) \ge f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0),\\ \exists O(x_0) : x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > f(x_0).\end{cases}$$

Jestliže nastane některá z předchozích možností říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 extrém (absolutní, lokální, ostrý lokální).

Věta 4.1.2. Spojitá funkce, jejíž derivace mění v bodě x_0 znaménko, má v bodě x_0 ostrý lokální extrém.

Pokud má spojitá funkce v bodě x_0 extrém (a neuvažujeme krajní body intervalu definičních hodnot)**, a tato funkce má spojitě se měnící první derivaci, pak hodnota derivace této funkce v bodě x_0 je vždy nulová. Opačná věta ale neplatí: nulová derivace nutně neznamená, že má funkce v daném bodě extrém.**





https://www.priklady.eu/cs/matematika/derivace.alej

1. Číslo 32 rozložte na dvou sčítanců tak, aby jejich součin byl největší.

2.

Číslo 16 rozložte na dvou sčítanců tak, aby součet druhých mocnin těchto sčítanců byl nejmenší.

Průběh funkce

Věta 4.2.1. Nechť $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, pak je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní, resp. konkávní.

2. Daná je funkce $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. Určete pro které x je funkce rostoucí, klesající, vypouklá a vydutá.

(**vypouklá=konvexní, vydutá=konkávní**)

3. Zjistěte zda funkce $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ je v bodě $x_0 = 2$ klesající a vypuklá.

4. Zjistěte zda je funkce v okolí bodu $x_0 = 0$ rostoucí a vydutá.

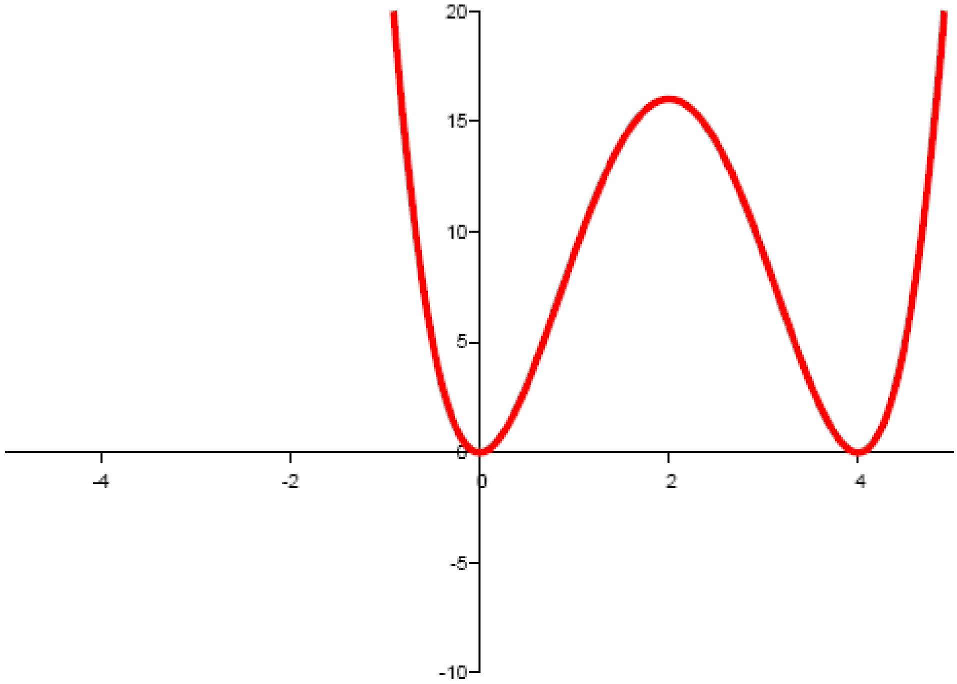
$$y = \frac{x}{x+1}$$

5. Daná je funkce $y = 2x^2 - \ln x$. Určete pro které x funkcia klesá.

6. Určete lokální extrémy funkce $y = x^2(4 - x)^2$

Řešení:

Graf



7. Určete lokální extrémy funkce y = sin x.(1+cos x) pro

$x \in \langle 0;2\pi \rangle$

<u>Asymptoty ke grafu funkce</u>

Definice 4.3.1.

Jestliže nastane alespoň jeden z případů $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, kde $x_0 \in (D_f)'$, pak říkáme, že **přímka $x = x_0$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě x_0**. Jestliže $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - q) = 0$, resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$, pak říkáme, že **přímka** $y = kx + q$ **je asymptotou funkce $f(x)$ v nevlastním bodě ∞**, resp. **$-\infty$.**

Určete asymptoty ke grafu funkce:

a. $y = \frac{3x}{x-1} + 2x$

b. $y = \frac{x^2}{2x+3}$