

11. Hodina – MA1-E

L'Hospitalovo pravidlo

Věta 3.5.1. Necht' $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a necht'

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$. Necht' existuje

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, a \in \mathbf{R}^*$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{e^x - x - 1}$.

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Poznámka

Neurčité výrazy $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 0^∞ , 0^∞ a 1^∞ musíme upravit na tvar $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Příklad: Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

Integrace – inverzní operace k derivování

Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = [x^3]' = 3x^2 = f(x).$$

Příklad 1.1.3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Příklad 1.1.4. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Příklad 1.1.5. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v intervalu $(0, \infty)$.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a, b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Tabulka základních neurčitých integrálů:

[1.]	$\int 0 dx = C$	
[2.]	$\int 1 dx = x + C$	
[3.]	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	pro $x > 0, n \neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	pro $x \neq 0$
[5.]	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
[6.]	$\int \cos x dx = \sin x + C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	pro $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	pro $x \in (-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	
[11.]	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	pro $a > 0, a \neq 1$
[12.]	$\int e^x dx = e^x + C$	
[13.]	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$	
[14.]	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	pro $a > 0$
[15.]	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	pro $x \in (-a, a), a > 0$
[16.]	$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$	pro $a \neq 0$

Příklad 1

Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = 4x^3 + 2x$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Příklad 2

Vypočtete:

a) $\int (x^3 - 6x + 7) dx$

b) $\int (x - 2)^2(x^2 + 1) dx$

c) $\int \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{4x^3} dx$

d) $\int \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}} dx$

Příklad 4

K dané funkci f v \mathbb{R} určete primitivní funkci F tak, aby graf funkce F procházel bodem A , jestliže:

a) $f: y = 3x^2 - 3x + 11, A[2, 3]$

b) $f: y = 1 - 2x + \cos x, A[\pi, 1]$

5.1 Vypočtete:

a) $\int 3x^5 dx$

b) $\int \frac{1}{x^4} dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^3} dx$

d) $\int x^3 \sqrt[5]{x^2} dx$

e) $\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx$

f) $\int \sqrt[5]{\frac{x^3 \sqrt{x^2}}{\sqrt{x}}} dx$

5.2 Vypočtete:

a) $\int (5x^6 - 2x^4 + 3x - 1) dx$

b) $\int (2x - 3)^2 dx$

c) $\int (x^2 - 1)(x + 2)^2 dx$

d) $\int (5a + 2x)^3 dx, a \in \mathbb{R}$

5.4 Vypočtete:

a) $\int (3 - x + 5 \sin x) dx$

b) $\int (a + 3 \cos x) dx, a \in \mathbb{R}$

c) $\int \frac{3a - 1}{2 \sin^2 x} dx, a \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{5k}{3 \cos^2 x} dx, k \in \mathbb{R}$

e) $\int \left(7e^x - \frac{5}{x} \right) dx$

f) $\int (2 \cdot 5^x - 4 \cos x + k) dx, k \in \mathbb{R}$

Bonus (LH pravidlo):**1.** Vypočtete:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3},$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\operatorname{tg}^2 x},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x2^x}{2^x - 1}.$

5. Vypočtete:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x,$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{cotg}(\pi x),$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \operatorname{cotg} x.$