12. Hodina – MA1-E

Tabulka základních neurčitých integrálů:

[1.]	$\int 0\,dx = C$	
[2.]	$\int 1\,dx = x + C$	
[3.]	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	pro $x > 0,\ \ n \neq -1$
[4.]	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	pro $x \neq 0$
[5.]	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	
[6.]	$\int \cos x\ dx = \sin x + C$	
[7.]	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	pro $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in \boldsymbol{Z}$
[8.]	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	pro $x \neq k\pi,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$
[9.]	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$	pro $x \in (-1,1)$
[10.]	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$	
[11.]	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	pro $a > 0,\ \ a \neq 1$

[12.]	$\int e^x\,dx = e^x + C$	
[13.]	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	
[14.]	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$	pro $a > 0$
[15.]	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$	pro $x \in (-a,a),\ a > 0$
[16.]	$\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$	pro $a \neq 0$

Tři nejzákladnější metody integrace: 1) přímá, 2) per partes 3) substituční

2) per partes

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx\ .$$

Poznámka

Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce $f(x) = u'(x)\cdot v(x)$ vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočíst další integrál z funkce $g(x) = u(x)\cdot v'(x)$. ***Integrování metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost“, abychom*** *volili funkce $u'(x)$ a $v(x)$ tak, aby byl integrál $\int g(x)dx = \int u(x)\cdot v'(x)dx$, pokud možno, jednodušší.*

Příklad 1.3.1. Vypočtěte integrál $\int (x^2+x)\cos x\,dx$

Řešení:

Použijeme metodu per partes, přičemž položíme

$$u' = \cos x\ , \qquad v = x^2 + x\ ,$$

takže $\quad u = \sin x\ , \qquad v' = 2x+1\ .$

Proto je $\quad \int (x^2+x)\cos x\,dx = (x^2+x)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,dx\ .$

K výpočtu posledního integrálu opět použijeme metody per partes, přičemž položíme

$$u' = \sin x\ , \qquad v = 2x+1\ ,$$

takže $\quad u = -\cos x\ , \qquad v' = 2\ .$

Dostaneme $\int (2x+1)\sin x\,dx = -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C_1\ .$

Je tedy $\quad \int (x^2+x)\cos x\,dx = (x^2+x)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C\ .$

Kdybychom v daném integrálu zvolili $u' = x^2+x$, $v = \cos x$,

bylo by $u = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ $\ v' = -\sin x$ a daný integrál bychom dostali ve tvaru

$\int (x^2+x)\cos x\,dx = \left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x + \int \left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\sin x\,dx$, což je integrál složitější než původní.

5.8 Vypočtěte:

a) $\int x \cos x \, dx$ b) $\int x e^{x} \, dx$
c) $\int x^2 \sin x \, dx$ d) $\int x e^{2x} \, dx$

5.9 Vypočtěte:

a) $\int x^2 \ln x \, dx$ b) $\int x \ln^2 x \, dx$
c) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ d) $\int \ln^2 x \, dx$

5.10 Vypočtěte:

a) $\int e^{x} \sin x \, dx$ b) $\int \cos^2 x \, dx$
c) $\int \sin(\ln x) \, dx$ d) $\int e^{x} \cos x \, dx$

Příklad 1.3.5. Vypočtěte integrál $\int x^n \ln x \, dx$

Příklad 1.3.6. Vypočtěte integrál $\int e^{-x} \cos(2x) dx$.

1. a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int (2x+3)\cos 2x dx$ c) $\int 3x \cos \frac{x}{2} dx$

d) $\int x e^{2x} dx$ e) $\int \left(x^2+2x\right) e^{\frac{x}{3}} dx$ f) $\int x^2 2^{-x} dx$

2. a) $\int x^2 \ln x dx$ b) $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln 2x dx$

d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ e) $\int x \ln^2 x dx$ f) $\int 4x^3 \operatorname{arctg} x dx$

3. a) $\int \ln x dx$ b) $\int \ln^2 x dx$ c) $\int \operatorname{arctg} x dx$

d) $\int \operatorname{arccotg} x dx$ e) $\int \arcsin x dx$ f) $\int \arccos x dx$

https://www.priklady.eu/cs/matematika.alej

2. Vypočtěte integrály:

2.) $\int \frac{x}{3}.e^{x}\,dx =$ 3.) $\int \ln x\,dx =$ 4.) $\int x.\sin x\,dx$

3. Vypočtěte integrály:

5.) $\int x^{3}\ln x\,dx =$ 6.) $\int x^{2}e^{x}dx =$ 7.) $\int x^{2}.\ln x\,dx =$

4. Vypočtěte integrály:

8.) $\int x.\cos x\,dx,$ 9.) $\int \frac{\ln x}{x}dx,$ 10.) $\int x.\ln x\,dx$

3) substituce

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Příklad 1.4.1. Vypočtěte integrál $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$.

Příklad 1.4.2. Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x \cos x \, dx$.

Příklad 1.4.4. Vypočtěte integrál $\int 3x\sqrt{5+x^2}\, dx$.

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(x) dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.2, položíme (provedeme substituci)

$x = \varphi(t)$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$dx = \varphi'(t) dt$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt .$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$.

Příklad 1.4.8. Vypočtěte integrál $\int \sin \sqrt{x} dx$.

Řešení:

Zvolíme $t = \sqrt{x}$, takže t je z intervalu $(0, \infty)$. Dostaneme

$$\int \sin \sqrt{x}\, dx = \begin{vmatrix} \text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{vmatrix} = 2\int t \sin t\, dt .$$

Získaný integrál řešíme metodu per partes podobně jako příklad 1.3.1:

$$2\int t \sin t\, dt = \begin{vmatrix} u' = \sin t & v = t \\ u = -\cos t & v' = 1 \end{vmatrix} = 2(-t\cos t + \int \cos t\, dt) = 2(-t\cos t + \sin t) + C =$$

$$= 2(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}) + C .$$

https://www.priklady.eu/cs/matematika.alej

1. Vypočtěte integrály:

1.) $\int (5x-1)^3 dx =$ 2.) $\int \frac{5x}{(x^2+4)^3} dx =$ 3.) $\int \sqrt[3]{4x-7}\, dx$

2. Vypočtěte integrály:

4.) $\int e^{5x} dx =$ 5.) $\int e^{1+\sin x} \cos x\, dx =$ 6.) $\int x.e^{x^2} dx =$

4. Vypočtěte integrály:

10.) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx =$ 11.) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx =$ 12.) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx =$

5. Vypočtěte integrály:

13.) $\int \cos \frac{x}{4} dx =$ 14.) $\int \sin 2x\, dx =$ 15.) $\int \cot g(2x+1) dx =$

6. Vypočtěte integrály:

16.) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx =$ 17.) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{(\cos x + \sin x)}} dx =$ 18.) $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} dx =$

5.11 Vypočtěte:

a) $\int 10x(x^2+13)^{12}\,\mathrm{d}x$

b) $\int 2\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

c) $\int 5x^2 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int 3x\sqrt[4]{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-3)^4}\,\mathrm{d}x$

5.12 Vypočtěte:

a) $\int (2x-5)^7\,\mathrm{d}x$

b) $\int 8x^2(x^3+2)^5\,\mathrm{d}x$

c) $\int 5x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{7-5x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$

5.13 Vypočtěte:

a) $\int \sin 7x\,\mathrm{d}x$

b) $\int 5k\cos \frac{8}{3}x\,\mathrm{d}x$

c) $\int 3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int 2\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$

5.14 Vypočtěte:

a) $\int 5x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int 3x^4\mathrm{e}^{-x^5+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{7\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

f) $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$

g) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

h) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$