13. Hodina – MA1-E

Určité integrály:

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $<a,b>$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Určitý integrál $(F(b) - F(a))$ určuje obsah plochy pod křivkou $f(x)$ s danými mezemi a a b.

Příklad 2.2.1. Vypočtěte integrál $\int_1^2 x^3 dx$.

2. Vypočtěte integrály:

2.) $\int_2^5 (2x+3)dx =$ 3.) $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1)dx =$

4.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$ 5.) $\int_1^3 \frac{1}{1+x}dx$ 6.) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x}dx$

3. Vypočtěte integrály:

7.) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx =$ 8.) $\int_1^4 \sqrt{x}dx =$ 9.) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x}dx =$

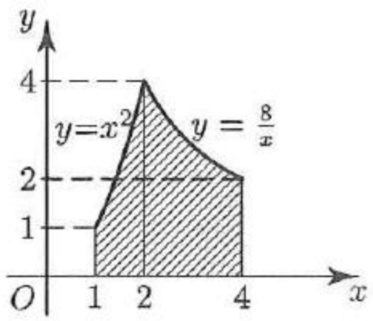
Příklad 2.2.2. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

Příklad 12

Vypočtěte integrál: $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 1, 2\rangle$ a $f(x) = \dfrac{8}{x}$ pro $x \in \langle 2, 4\rangle$

Řešení

Funkce f je spojitá a kladná v celém intervalu $\langle 1, 4\rangle$, v bodě $x = 2$ je $f(x) = 4$. Daným integrálem tedy vypočítáme obsah obrazce nakresleného na obr. 6.5. Podle věty o aditivnosti určitého integrálu je



Obr. 6.5

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \frac{8}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 8[\ln|x|]_2^4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 8(\ln 4 - \ln 2) = \frac{7}{3} + 8\ln 2.$$

- **Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li v intervalu $\langle a, b\rangle$ nerovnosti $m \leqq f(x) \leqq M$, potom**

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a).$$

Předcházející větu využíváme při odhadu integrálů, které elementárními metodami nedovedeme vypočítat.

6.10 Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a křivkou:

a) $y = -x^2 + 2x$ b) $y = 3x - x^2$

c) $y = \sin x + 2$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ d) $y = x^2 - 4$

6.11 Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen křivkami:

a) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ b) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = \mathrm{e}$

c) $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

d) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$

6.12 Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen křivkami:

a) $y = x^2$, $y^2 = x$ b) $y = x^2$, $y = x$

6.16 Vypočtěte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami:
$y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$

Integrace Racionálních funkcí

Shrnutí následující teorie: Racionální zlomek rozložíme na parciální zlomky. To jsou takové zlomky, jejichž jmenovatel nelze v oboru reálných čísel dále rozložit a zároveň polynom v jejich čitateli má nižší stupeň než polynom ve jmenovateli. Například

$$\frac{x+4}{x^2+2}$$

je parciální zlomek. Zlomek

$$\frac{x+4}{x^2-2}$$

není parciální protože $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Zlomek

$$\frac{x^2+4}{x^2+2}$$

také není parciální, protože polynom v čitateli nemá menší stupeň než polynom ve jmenovateli.

Tyto parciální zlomky zintegrujeme. Například:

$$\int \frac{1}{x+5}dx = \ln(x+5)$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} + \int \frac{4}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + 4\frac{1}{\sqrt{2}}\ arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

A dostaneme hledanou primitivní funkci.

Teorie:

Definice 1.5.3.

Racionální funkcí *R(x)* nazveme funkci, která je podílem dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$:

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad Q_n(x)\neq 0\,.$$

Definice 1.5.4.

Racionální funkce $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se nazývá **ryze lomená**, je-li stupeň m polynomu $P_m(x)$ menší než stupeň n polynomu $Q_n(x)$, tj. $m<n$. Je-li $m\geq n$, pak se funkce *R(x)* nazývá **neryze lomená** racionální funkce.

Věta 1.5.4.

Každou neryze lomenou racionální funkci můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj. $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m_1}(x) + \dfrac{P_{m_2}(x)}{Q_n(x)}$, kde $m_2 < n$.

Příklad 1.5.4. Vyjádřete racionální funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení:

Polynom $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ v čitateli racionální funkce je 3. stupně a polynom $Q_2(x) = x^2 - x + 1$ ve jmenovateli má stupeň 2. Polynomy můžeme vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3 \\
\underline{-(x^3 - x^2 + x)} \\
\qquad 3x^2 \qquad -1 \\
\quad \underline{-(3x^2 - 3x + 3)} \\
\qquad\qquad 3x - 4 \quad \text{... zbytek}
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \frac{3x - 4}{x^2 - x + 1}.$$

Definice 1.5.5.

Částečnými (parciálními) **zlomky** nazýváme racionální funkce tvaru

$$\frac{A}{(x - \alpha)^{k_1}} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{k_2}} \quad ,$$

kde A, M, N, p, q jsou reálná čísla, k_1, k_2 jsou přirozená čísla a polynom $x^2 + px + q$ nemá reálné kořeny ($D = p^2 - 4q < 0$).

1. Parciální zlomky prvního typu odpovídají reálným kořenům jmenovatele a parciální zlomky druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů.

2. Ryze lomenou racionální funkci R(x) lze vyjádřit ve tvaru

$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \ldots + R_s(x)$, *kde* $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ *jsou parciální zlomky. Pro integraci ryze lomené racionální funkce stačí umět integrovat tyto parciální zlomky.*

A. Rozklad pro reálné různé kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k ($k \le n$) reálných různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (jednoduché kořeny), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \dfrac{A_k}{x-\alpha_k} + R_{k+1}(x) \dots$,

kde $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou reálné konstanty.

Nalezneme konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ tak, abychom po sečtení všech parciálních zlomků dostali danou racionální funkci *R(x)*. Jednotlivé parciální zlomky pak můžeme snadno integrovat.

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx$.

Řešení:

Výpočet můžeme rozdělit do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož je $m < n$, je daná funkce ryze lomená racionální funkce (není nutno dělit polynomy).
2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = x(x^2-4x+3) = x(x-1)(x-3)$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálné jednoduché kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:
$$\frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}.$$
4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, A_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:
$$x^2 - 8x + 3 = A_1(x-1)(x-3) + A_2 x(x-3) + A_3 x(x-1).$$
Tuto rovnici lze řešit několika způsoby:

a) **Dosazovací metoda.** Oba polynomy se musí rovnat pro libovolné hodnoty x.

Dosadíme-li obecně tři různé hodnoty x, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé koeficienty A_1, A_2, A_3. Tuto soustavu snadno vyřešíme. Pokud má polynom $Q(x)$ reálné kořeny, je výhodné dosadit právě tyto kořeny.

Pro $x=0$ dostaneme: $3=3A_1+0A_2+0A_3$. Tedy $A_1=1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $-4=0A_1-2A_2+0A_3$. Tedy $A_2=2$.

Pro $x=3$ dostaneme: $-12=0A_1+0A_2+6A_3$. Tedy $A_3=-2$.

b) **Srovnávací metoda.** Rovnice představuje rovnost dvou polynomů.

Rovnost nastane, jestliže se budou rovnat koeficienty polynomu na levé straně a odpovídající koeficienty polynomu na pravé straně rovnice.

$$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)$$

$$x^2-8x+3=A_1(x^2-4x+3)+A_2(x^2-3x)+A_3(x^2-x)$$

$$x^2-8x+3=x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-4A_1-3A_2-A_3)+3A_1$$

Koeficienty u x^2: $1=A_1+A_2+A_3$

Koeficienty u x^1: $-8=-4A_1-3A_2-A_3$

Koeficienty u x^0: $3=3A_1$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=-2$.

Metody můžeme kombinovat.

c) **Kombinace metod a), b).**

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx = \int \left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln\frac{|x|(x-1)^2}{(x-3)^2} + C \ .$$

V případě reálných jednoduchých kořenů polynom $Q_n(x)$ dostaneme pouze integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A \ \ln|x-\alpha| + C \ .$$

B. Rozklad pro reálné násobné kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má r-násobný ($r \le n$) kořen α, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha)^r} + R_{r+1}(x) + \ \ldots \ ,$$

kde $B_1, B_2, \ \ldots \ , B_r$ jsou reálné konstanty.

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=4$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=4$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

   $(x^4-2x^3+3x^2-x+1):(x^4-3x^3+3x^2-x) = 1$

$$\begin{array}{l} -(x^4-3x^3+3x^2-x) \\ \hline \qquad x^3 \qquad\qquad +1 \end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\ .$$

Konstanta 1 je zvláštní případ polynomu nultého stupně a zbývající racionální funkce je již ryze lomená. Tuto racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_4(x)=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má jednoduchý reálný kořen $x_1=0$ a trojnásobný reálný kořen $x_{2,3,4}=1$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=0$ a B pro $x_{2,3,4}=1$):

   $$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}\ .$$
4. Nalezneme konstanty rozkladu A, B_1, B_2, B_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=x(x-1)^3$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

   $$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálné kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x=0$ dostaneme: $\quad 1=-A+0B_1+0B_2+0B_3$. Tedy $A=-1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $\quad 2=0A+0B_1+0B_2+1B_3$. Tedy $B_3=2$.

Jelikož již nemáme další kořeny, můžeme dosadit dvě jiná reálná čísla a dostaneme dvě rovnice pro dosud neznámé koeficienty B_1 a B_2.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme také použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

$$x^3+1=A(x^3-3x^2+3x-1)+B_1(x^3-2x^2+x)+B_2(x^2-x)+B_3x$$

$$x^3+1=(A+B_1)x^3+(-3A-2B_1+B_2)x^2+(3A+B_1-B_2+B_3)x-A$$

Koeficienty u x^3: $\quad 1 = A + B_1$

Koeficienty u x^2: $\quad 0 = -3A - 2B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $B_1 = 2$, $B_2 = 1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = \int (1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}\right) dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx =$$

$$= x - \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2(x-1)^2} = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [16] *z tabulky 1.2.1. Použili jsme substituci* $x - \alpha = t$*:*

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = \begin{vmatrix} x - \alpha = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = B_k \int \frac{dt}{t^k} dt = B_k \int t^{-k} dt = B_k \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{B_k}{(1-k)t^{k-1}} + C = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ pro } k \geq 2.$$

C. Rozklad pro komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $x^2 + px + q$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)$.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \dots ,$$

kde M, N jsou reálné konstanty.

Příklad 1.5.7. Vypočtěte integrál $\int \frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx$.

Řešení:

Jako v předcházejících příkladech rozdělíme výpočet do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=5$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n=3$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$\begin{array}{l} (x^5+x^3+x^2+2):(x^3+1)=x^2+1 \\ \underline{-(x^5+\qquad x^2)} \\ \qquad\qquad x^3+2 \\ \qquad\quad \underline{-(x^3+1)} \\ \qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}=x^2+1+\frac{1}{x^3+1}.$$

Racionální funkci $\frac{1}{x^3+1}$ rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x)=x^3+1$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x)=(x+1)(x^2-x+1)$. (Pro rozklad jsme použili vzorec $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$). To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálný jednoduchý kořen $x_1=-1$ a komplexně sdružené kořeny, protože diskriminant kvadratické rovnice $x^2-x+1=0$ je záporný: $D=(-1)^2-4=-3<0$.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=-1$ a C pro trojčlen x^2-x+1):

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A, M, N. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x) = x^3 + 1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1) .$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálný kořen polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x = -1$ dostaneme $1 = A(1+1+1) + 0$. Tedy $A = \frac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0 = A + M$

Koeficienty u x^0: $1 = A + N$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $M = -\frac{1}{3}$, $N = \frac{2}{3}$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky (nezapomeňme na polynom získaný dělením v kroku 1):

$$\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1} dx = \int (x^2 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1}) dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx .$$

První integrál je snadný, známe jej z případu A:

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C_1 \ .$$

Druhý integrál se budeme snažit upravit tak, abychom v čitateli zlomku získali derivaci jmenovatele.

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx \ .$$

Dostaneme dva integrály. První integrujeme pomocí vzorce [13] z tabulky 1.2.1 (fakticky použijeme substituci $x^2-x+1=t$):

$$-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + C_2 = -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C_2 \ .$$

Doplněním na čtverec upravíme druhý integrál tak, aby bylo možno použít vzorec [14] z tabulky 1.2.1:

$$-\frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_3 \ .$$

Sečtením integrálů, které jsme postupně vypočítali, dostaneme výsledek:

$$\int \frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ .$$

Úlohy:

1. a) $\int \frac{2x}{x^2-6x+5}dx$ b) $\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ c) $\int \frac{x^2-3}{x^2+8x+12}dx$

d) $\int \frac{4x^2-12x-10}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ e) $\int \frac{x^3+3}{x^2-3x}dx$ f) $\int \frac{\frac{3}{2}x^2-30}{x^3-4x^2-20x+48}dx$

2. a) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ b) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}dx$ c) $\int \frac{-x^3+2x^2+1}{x(x+1)^3}dx$

d) $\int \frac{5x^3-20x^2-70x+78}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2-10x+25\right)}dx$ e) $\int \frac{2x^3-11x^2+4x+-4}{x^4-2x}dx$

f) $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+2x+1}{x^5-3x^4+3x^3+x^2}dx$

3. a) $\int \frac{1}{x^2-4x+6}dx$ b) $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx$ c) $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+12}dx$

d) $\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$ e) $\int \frac{5x-1}{x^2-x+1}dx$

f) $\int \frac{3x^4-9x^3+13x^2-x+2}{x^2+2x+2}dx$

4. a) $\int \frac{x+2}{x^4-16}dx$ b) $\int \frac{x-3}{x^4-81}dx$ c) $\int \frac{x+8}{x^3+8}dx$

d) $\int \frac{3x+1}{x^3-1}dx$ e) $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}dx$

f) $\int \frac{x^2-2x-7}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)}dx$

Řešení:

1. a) $\frac{5}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$; b) $\frac{17}{5}\ln|x-4|-\frac{2}{5}\ln|x+1|+C$;

c) $x-\frac{17}{2}\ln|x+6|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$; d) $3\ln|x-1|+2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2+3x+10\ln|x-3|-\ln|x|+C$; f) $\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-6|+C$.

2. a) $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$; b) $2\ln|x+2|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+2}+C$;

c) $\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$; d) $2\ln|x+2|+3\ln|x-5|+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-5}+C$;

e) $5\ln|x|-3\ln|x-2|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; f) $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

3. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$; b) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

c) $\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C$; d) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; f) $x^3+x+\ln\left|x^2-3x+4\right|+\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$.

4. a) $\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; b) $\frac{1}{18}\ln|x+3|-\frac{1}{36}\ln\left|x^2+9\right|-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;