2. Hodina – MA1-E

C) Číselné množiny

Nejfrekventovanějšími množinami jsou množiny číselné:

přirozená čísla	$\mathbf{N}$	$1, 2, 3, 4, \ldots$
celá čísla	$\mathbf{Z}$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$
racionální čísla	$\mathbf{Q}$	zlomky $\pm \frac{p}{q}$
reálná čísla	$\mathbf{R}$	korespondují **všem** bodům číselné osy
iracionální čísla	$\mathbf{Ir}$	$\mathbf{Ir} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, např. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \mathrm{e}, \ldots$
komplexní čísla	$\mathbf{C}$	jsou tvaru $a + ib$, $a, b \in \mathrm{R}$, i je imaginární jednotka

Připomeňme též užívání značek při práci s číselnými *intervaly* na reálné ose:

otevřený interval $(a, b) = \{x \in R, a < x < b\}$

uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in R, a \leq x \leq b\}$

zleva (resp. zprava) uzavřený interval $\langle a, b) = \{x \in R, a \leq x < b\}$
(resp. $(a, b\rangle = \{x \in R, a < x \leq b\}$)

neohraničený interval $(-\infty, +\infty) \ldots$ celá číselná osa

zleva neohraničený, zprava uzavřený interval $(-\infty, a\rangle = \{x \in R, x \leq a\}$

atd.

Množiny

Průnik množin A, B definujeme jako množinu všech prvků, které jsou společné oběma množinám A, B. Průnik množin A, B označujeme $A \cap B$. Platí tedy

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Dvě množiny A, B, pro něž platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme ***disjunktními množinami***.

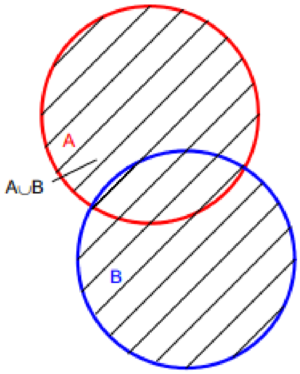
Sjednocení množin A, B definujeme jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny prvky množiny A a právě všechny prvky množiny B. Sjednocení množin A, B označujeme $A \cup B$. Platí tedy $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

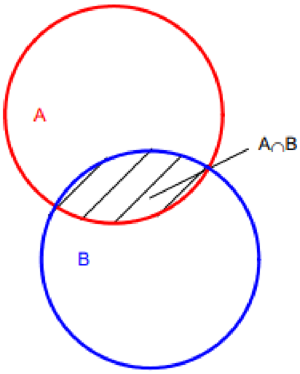
Rozdíl množin A, B v daném pořadí definujeme jako množinu všech prvků, které jsou prvky množiny A a nejsou prvky množiny B. Rozdíl množin A, B označujeme A - B nebo $A \setminus B$. Platí tedy $A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

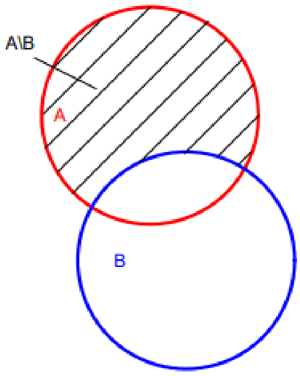
Doplněk množiny A ***v množině*** Z. Nechť $A \subset Z$. Doplňkem množiny A v množině Z nazýváme podmnožinu množiny Z, která obsahuje prvky, které nepatří do množiny A.

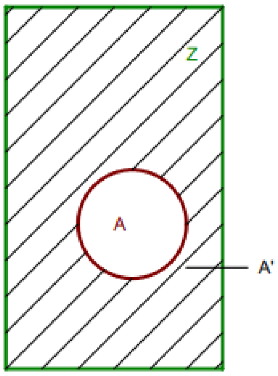
Označujeme A' a platí

$$A' = Z - A = \{x : (x \in Z) \wedge (x \notin A)\}.$$









21. Zapište výčtem prvků následující množiny.
   a) $M_1 = \{x \in N;\ x^2 < 20\}$ b) $M_2 = \{x \in Z;\ |x| = 5\}$

22. Jsou dány dvě množiny: $M_1 = \{x \in N;\ x \mid 60\}$, $M_2 = \{x \in N;\ 7 < x \leqq 10\}$. Zapište výsledek operací $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_2 - M_1$.

23. Najděte takové množiny A, B, pro které platí:
   $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $B - A = \{5, 6\}$.

24. Doplněk množiny $\{x \in R;\ -3 < x \leqq 5\}$ v množině reálných čísel zapište jako sjednocení dvou intervalů.

25. Jsou dány tři intervaly $A = \langle -7; 2\rangle$, $B = \langle -2; 5)$, $C = \langle 2; \infty)$. Zapište:
   a) $A \cap B$ c) $A \cup B$ e) $(A \cup B) \cap C$ g) A'_R
   b) $A \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$ f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ h) $A - B$

26. Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

   a) $A \subset B$, *b)* $A \subset C$, *c)* $B \subset C$,
   d) $B \subset A$, *e)* $C \subset A$, *f)* $C \subset B$,
   g) $A \cup B = C$, *h)* $A \setminus B = C$, *i)* $A \cap B = C$.

27. Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelné třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

a) $M_1 \cup M_2$,	b) $M_1 \cup M_2 \cup M_3$,
c) $M_2 \cap M_3$,	d) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$,
e) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$,	f) $(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$,
g) $M_2 \setminus M_1$,	h) $M_1 \setminus M_2$,
i) $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$,	j) $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$,
k) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3$,	l) $(M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3)$.

Kartézský součin množin *A*, *B*:
Jsou dány množiny *A*, *B*. Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Př. 1: Jsou dány množiny $A = \{a; b\}$, $B = \{0; 1; \pi\}$.
a) Sestroj kartézský součin $A \times B$. b) Sestroj kartézský součin $A \times A$.

a) kartézský součin $A \times B$.
Jde o analýzu textu, tedy čtení. Postupujeme podle definice:
Kartézský součin $A \times B$ je množina $\Rightarrow$ $A \times B = \{\ \}$
teď musíme najít prvky:
množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$ $\Rightarrow$ sestavujeme dvojice $[\ \ ,\ \ ]$

- první je něco z *A* $\Rightarrow [a,\ \ ]$
- druhé něco z *B* $\Rightarrow [a, 0]$

Máme sestavit všechny dvojice$\Rightarrow$ $A \times B = \{[a,0],[a,1],[a,\pi],[b,0],[b,1],[b,\pi]\}$

b) kartézský součin $A \times A$.
Stejné jako předtím, ale i na druhé místo vybíráme z *A*.
$A \times A \{[a,a],[a,b],[b,a],[b,b]\}$

Př. 2: Je dán kartézský součin $C \times D = \{[1,2],[1,3],[0,2][0,3]\}$. Urči množiny *C*, *D*.

Př. 7: Jsou dány množiny: $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$, $A_3 = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$. Urči počet prvků kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times A_3$. Urči kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Příklad 1. Určete kartézský součin $A \times B$ množin A a B, je-li $A = \{1; 3; 6\}$, $B = \{2; 4\}$.

Příklad 2. Graficky znázorněte kartézský součin $A \times B$ množin A a B, je-li $A = \langle -3; 1\rangle$, $B = \langle -2; 3\rangle$.

Určete definiční obory funkcí:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)\,(x-4)}{x^2-6x+9}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1-x)}}{\frac{1}{2}-x}$$

$$f(x) = \sqrt{(5x-6)}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$$

$$f(x) = \sqrt{-x+7} - \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$$

Řešení některých příkladů

Příklady 26, 27

e), f), i);

a) $M \setminus \{1,5,7,11,13\}$, b) $M \setminus \{1,7,11,13\}$, c) $\{15\}$, d) $\emptyset$, e)f) $\{10,15\}$, g) $\{3,9,15\}$;

Definiční obory funkcí:

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ $(x \in R)$

$f(x) = \frac{(x-2)((x-4)}{x^2-6x+9}$ $(x \neq 3)$

$f(x) = \frac{\sqrt{(1-x)}}{\frac{1}{2}-x}$ $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

$f(x) = \sqrt{(5x-6)}$

$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$ $x \in (-\infty, -3\rangle \cup (4, \infty)$

$f(x) = \sqrt{-x+7} - \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ $x \in (-2, 3\rangle$