

Konstruktivní geometrie

Fakulta strojní

Přednášející:

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci

budova **G** – 4. patro – kancelář 4072

e-mail: **daniela.bimova@tul.cz**

telefon: 485 352 808

Sylabus předmětu

Přednášky:

1. Analytická geometrie v E_3 . Rovnice přímky a roviny.
2. Polohové a metrické úlohy v E_3 .
3. Základní principy promítání (rovnoběžné a středové), speciální typy promítání (Mongeovo promítání, pravoúhlá axonometrie atd.)
4. Zobrazení základních prvků a těles v Mongeově promítání.
5. Šroubovice, základní vlastnosti šroubovice.
6. Konstruktivní úlohy o šroubovici.
7. Vektorová funkce jedné reálné proměnné. Definice a rovnice křivky.
8. Průvodní trojhran křivky, křivost.
9. Pojem plochy, křivky na ploše, tečná rovina plochy.
10. Rotační plochy (RP), meridián RP, tečná rovina RP.
11. Konstruktivní úlohy o RP, řez RP rovinou. Průniky RP.
12. Šroubové plochy. Základní pojmy a vlastnosti. Přímkové a cyklické šroubové plochy.

Studijní literatura

Povinná literatura:

- URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1967.
- URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1982.
- FABIÁNOVÁ, H.: *Konstruktivní geometrie*. Ediční středisko VŠST, Liberec 1992. ISBN 80-7083-086-7

Doporučená literatura:

- POMYKALOVÁ, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 0*. TUL, Liberec, 2004. ISBN 80-7083-795-0.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 0S*. TUL, Liberec, 2004. ISBN 80-7083-810-8.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 1*. TUL, Liberec, 2007. ISBN 80-7372-194-7.
- PECINA, V., PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 2*. TUL, Liberec, 2002. ISBN 80-7083-771-3.
- PŘÍVRATSKÁ, J., PECINA, V., BÍMOVÁ, D.: *Geometrie pro techniky - modul 3*. TUL, Liberec, 2003. ISBN 80-7083-673-3.
- DRÁBEK, K., HARANT, F., SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie II*. SNTL, Praha 1979.
- VORÁČOVÁ, Š. a kol.: *Atlas geometrie*. Academia, Praha 2012. ISBN 978-80-200-1575-4.
- PARÉ, E.G., LOVING, R.O., HILL, I.L., PARÉ, R.C.: *Descriptive geometry, 8th edition*. Macmillan Publishing Company, New York, USA 1991. ISBN 0-02-391331-2.

Internetové odkazy

- <https://kmd.fp.tul.cz/cs/cb-profile/bimova>
- mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Uvod.html
- <https://www.geogebra.org/m/RQdvjH3V>
- <https://www.geogebra.org/m/VC4J2KTM>

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Analytická geometrie je část geometrie, která v euklidovské geometrii zkoumá geometrické útvary pomocí algebraických a analytických metod.

V analytické geometrii jsou geometrické útvary v prostoru vyjadřovány čísla (např. každý bod je vyjádřen uspořádanou skupinou čísel – tzv. souřadnicemi – v rovině jsou to dvě čísla, v prostoru potom tři) a rovnicemi ve zvolených souřadnicových soustavách. Přitom rovnicím geometrických útvarů vyhovují souřadnice bodů těchto útvarů.

Za zakladatele analytické geometrie je považován René Descartes.



René Descartes

* 31.3.1596 La Haye – † 11.2.1650 Stockholm
- francouzský filosof, matematik a fyzik

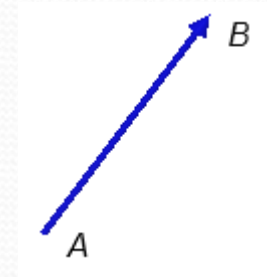
Významně se podílel na rozvoji matematiky a fyziky, na vytvoření číselné reprezentace geometrických objektů známé jako kartézská soustava souřadnic.

Společně s Pierrem de Fermatem (1601 – 1665) je považován za zakladatele analytické geometrie. Základní metody analytické geometrie publikoval René Descartes v roce 1637 ve svém prvním díle zvaném *Rozpravy o metodě*. Toto dílo publikoval anonymně.

Vektory

Orientovaná úsečka

Orientovanou úsečkou AB nazveme úsečku, pro kterou definujeme její počáteční (A) a její koncový bod (B).



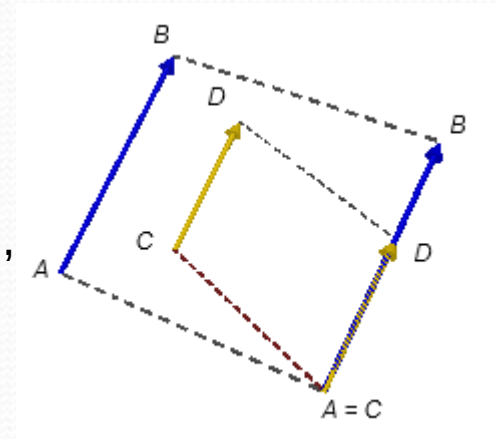
1. Velikost orientované úsečky

Velikost orientované úsečky, tj. vzdálenost bodů A , B , označíme $|AB|$.

Splývá-li počáteční bod orientované úsečky s jejím koncovým bodem, tj. je-li $A \equiv B$, pak mluvíme o **nulové** orientované úsečce, neboť její velikost je rovna nule.

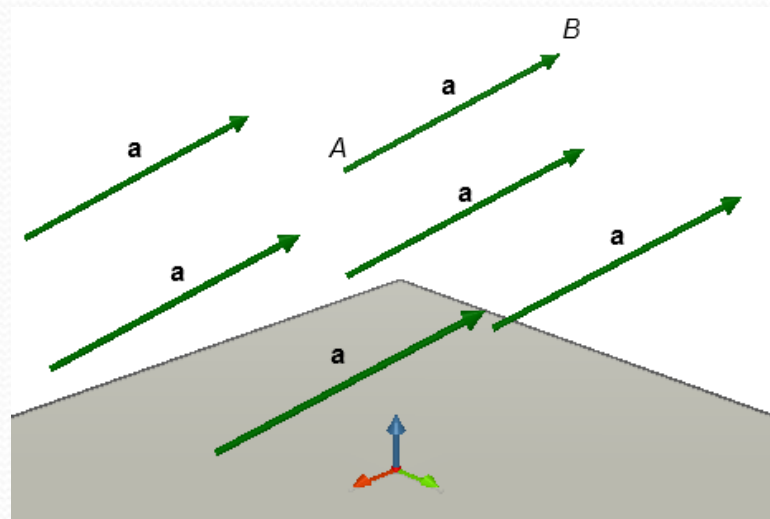
Dvě rovnoběžné nenulové orientované úsečky AB a CD jsou

- **souhlasně orientované (souhlasně rovnoběžné)**,
jestliže po jejich posunutí do polohy se společným počátkem $A \equiv C$ leží bod D na polopřímce AB ;
- **nesouhlasně orientované (nesouhlasně rovnoběžné)**,
leží-li bod D na opačné polopřímce k polopřímce AB .



Geometrická reprezentace vektoru

Vektorem **a** nazveme množinu všech rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně velkých úseček. Každou z těchto úseček nazýváme umístěním vektoru. (Např. orientovaná úsečka **AB** je umístěním vektoru **a**.)



Dva vektory **a** a **b** nazveme (ne)souhlasně orientované, jsou-li jejich libovolná umístění (ne)souhlasně orientované úsečky.

1. Velikost vektoru

Velikostí vektoru rozumíme velikost jeho libovolného umístění.

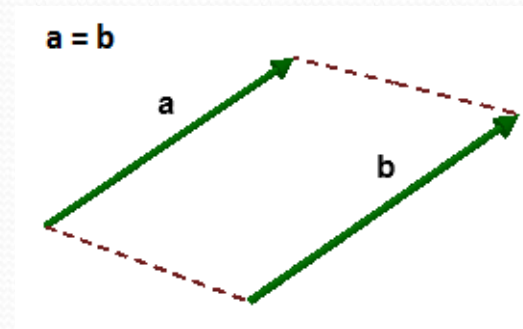
Je-li $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{a}| = 1$, nazýváme vektor **a** **jednotkovým vektorem**.

2. Operace s geometrickými vektory

2.1 Rovnost vektorů

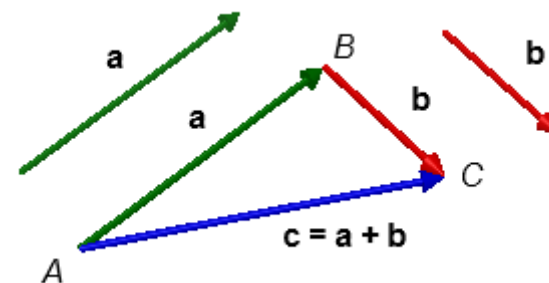
Dva vektory **a**, **b** jsou si rovny, jsou-li reprezentovány stejnou množinou rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně velkých orientovaných úseček.

Označujeme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.



2.2 Součet vektorů

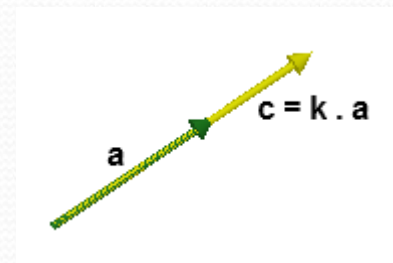
Předpokládejme, že jsou dány dva vektory **a** a **b**, pak vektor **c** nazveme součtem vektorů **a**, **b**, jestliže platí: je-li orientovaná úsečka **AB** umístěním vektoru **a** a orientovaná úsečka **BC** umístěním vektoru **b**, pak orientovaná úsečka **AC** je umístěním vektoru **c**. Tj. vektor $\mathbf{c} = \mathbf{AC}$ je vektor s počátečním bodem v bodě **A** a s koncovým bodem v bodě **C** reprezentující součet vektorů $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.



2.3 Násobek vektoru reálným číslem k

Vektor

$$\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a},$$



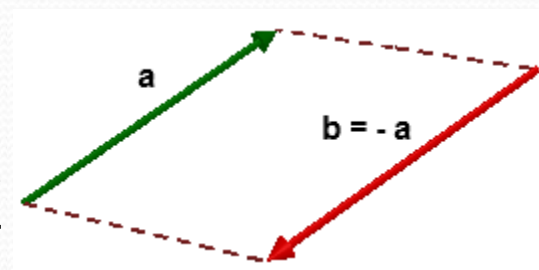
kde k je reálné číslo, nazveme k -násobkem vektoru $\mathbf{a}$, jsou-li definovány následující vlastnosti:

- a) je-li $k = 0$ nebo $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ je nulový vektor), pak je $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- b) je-li $k \neq 0$ a $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, potom vektor $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a}$ má stejný směr jako vektor $\mathbf{a}$, jeho velikost je $|k|$ násobek velikosti vektoru $\mathbf{a}$, tj.

$$|\mathbf{c}| = |k| \cdot |\mathbf{a}|.$$

Orientace vektoru $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a}$ je stejná jako orientace vektoru $\mathbf{a}$, je-li $k > 0$, a opačná jako orientace vektoru $\mathbf{a}$, tj. pro $k < 0$.

Poznámka: Vektor $\mathbf{b}$ je opačný k vektoru $\mathbf{a}$, má-li stejný směr a velikost jako vektor $\mathbf{a}$, ale opačnou orientaci. Opačný vektor k vektoru $\mathbf{a}$ můžeme získat tak, že budeme násobit vektor $\mathbf{a}$ číslem (-1) . Opačný vektor k vektoru $\mathbf{a}$ se obvykle značí $(-\mathbf{a})$.



Důsledky výše uvedených definic jsou následující vztahy:

Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ jsou libovolné vektory, $\mathbf{0}$ nulový vektor a α, β reálná čísla, pak pro ně platí:

- a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (komutativní zákon)
- b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asociativní zákon)

c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

d) Ke každému vektoru $\mathbf{a}$ existuje vektor $(-\mathbf{a})$ tak, že platí $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

e) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}$ (distributivní zákon)

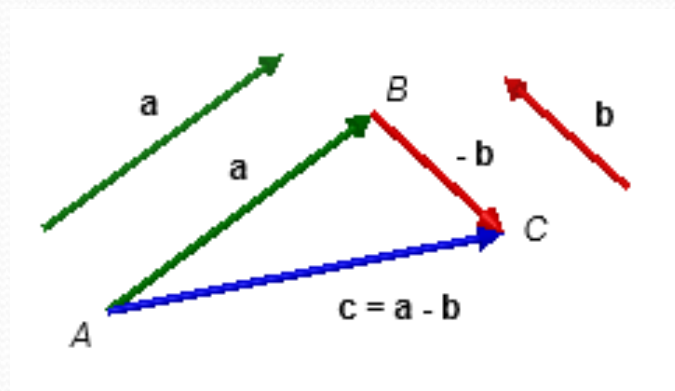
f) $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$ (distributivní zákon)

g) $\alpha (\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta) \mathbf{a}$

2.4 Odčítání vektorů

Odčítání vektoru $\mathbf{b}$ od vektoru $\mathbf{a}$ je definováno jako součet vektoru $\mathbf{a}$ s vektorem opačným k vektoru $\mathbf{b}$, tj.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$



2.5 Lineární kombinace vektorů

Lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ nazveme vektor $\mathbf{a}$, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taková, že

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n.$$

Skupina vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ je **lineárně závislá**, jestliže existuje alespoň jeden reálný koeficient $\alpha_k \neq 0$ a platí

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Skupina vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ je **lineárně nezávislá**, jestliže

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

pouze, když $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

2.5.1 Vektory kolineární

Nechť jsou dány dva lineárně závislé vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, pak můžeme psát např.

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a}.$$

Z definice reálného α násobku vektoru víme, že umístění vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou rovnoběžná s touž přímkou (tj. vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou rovnoběžné).

Vektory rovnoběžné se stejnou přímkou nazýváme **kolineární**.

2.5.2 Vektory komplanární

Nechť jsou dány tři lineárně závislé vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, pak alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Nechť je to např. vektor $\mathbf{c}$, tj.

$$\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}.$$

Podle definice součtu vektorů platí, že je-li $\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{AB}$, $\beta \cdot \mathbf{b} = \mathbf{BC}$, pak je $\mathbf{c} = \mathbf{AC}$. Protože vektor $\mathbf{a}$ je rovnoběžný s vektorem $\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{AB}$ a vektor $\mathbf{b}$ s vektorem $\beta \cdot \mathbf{b} = \mathbf{BC}$, je možné v rovině ABC najít alespoň jedno umístění vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, tj. vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou rovnoběžné s rovinou ABC .

Vektory rovnoběžné s jednou rovinou nazveme **komplanární**.

2.5.3 Báze vektorového prostoru

Nechť jsou ve vektorovém prostoru E_3 dány tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, pak tyto vektory tvoří v daném vektorovém prostoru **bázi** a libovolný vektor $\mathbf{u}$ vektorového prostoru lze vyjádřit jednoznačně jako jejich lineární kombinaci, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c},$$

kde α , β , γ jsou reálná čísla.

Aritmetická reprezentace vektoru

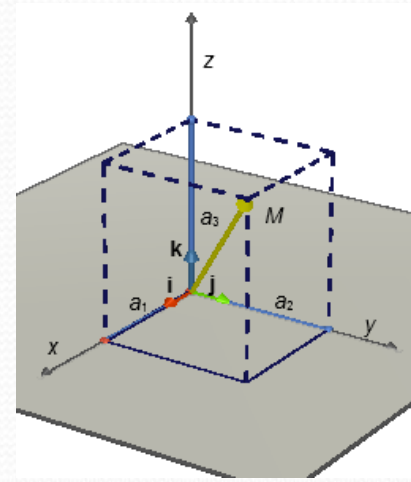
1. Souřadnice vektoru

Nechť je dána kartézská souřadnicová soustava O_{xyz} . Na souřadnicových osách x , y , z můžeme definovat trojici jednotkových vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$. Jednotkové vektory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ přitom volíme tak, aby jejich umístění měla společný počátek v počátku O_{xyz} dané souřadnicové soustavy a aby se jejich směry shodovaly s kladnými směry souřadnicových os.

Je možné dokázat, že trojice jednotkových vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ je lineárně nezávislá, proto lze libovolný vektor $\mathbf{a}$ vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, tj.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}.$$

Vektory $a_1 \mathbf{i}$, $a_2 \mathbf{j}$, $a_3 \mathbf{k}$ nazýváme **složkami vektoru $\mathbf{a}$** a reálná čísla a_1 , a_2 , a_3 **souřadnicemi vektoru $\mathbf{a}$** . Vektor $\mathbf{a}$ pak píšeme ve tvaru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.



2. Souřadnice vektoru v závislosti na souřadnicích bodů

Nechť je v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 dán libovolný bod A . Vektor $\mathbf{OA}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, tj.

$$\mathbf{OA} = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k}.$$

Čísla x_A , y_A , z_A nazveme (kartézskými) **souřadnicemi** bodu A a píšeme $A = [x_A, y_A, z_A]$.

Nechť jsou ve trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 dány dva libovolné body $A = [x_A, y_A, z_A]$ a $B = [x_B, y_B, z_B]$. Je-li $\mathbf{AB}$ umístění vektoru $\mathbf{a}$, pak souřadnice vektoru $\mathbf{a}$ vypočteme ze vztahu

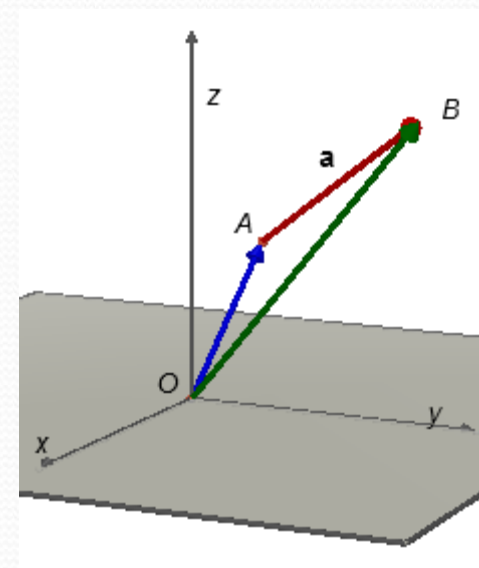
$$\mathbf{OA} + \mathbf{a} = \mathbf{OB},$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j} + z_B \mathbf{k} - x_A \mathbf{i} - y_A \mathbf{j} - z_A \mathbf{k} = \\ &= (x_B - x_A) \mathbf{i} + (y_B - y_A) \mathbf{j} + (z_B - z_A) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

Odkud

$$\mathbf{a} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = B - A.$$



2. Operace s aritmetickými vektory

Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru E_3 máme dané dva vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pomocí souřadnic, pak platí následující pravidla:

- a) dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou si rovny, tj. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, právě když $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, 3$;
- b) souřadnice vektoru, který je výsledkem součtu dvou vektorů, získáme ze vztahu

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

- c) souřadnice α -násobku, kde $\alpha \in \mathbf{R}$, vektoru jsou určeny vztahem

$$\alpha \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3);$$

- d) souřadnice nulového vektoru jsou dány předpisem

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0);$$

- e) souřadnice jednotkových vektorů na souřadnicových osách jsou dány předpisy

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1);$$

- f) velikost vektoru $\mathbf{a}$ je dána předpisem

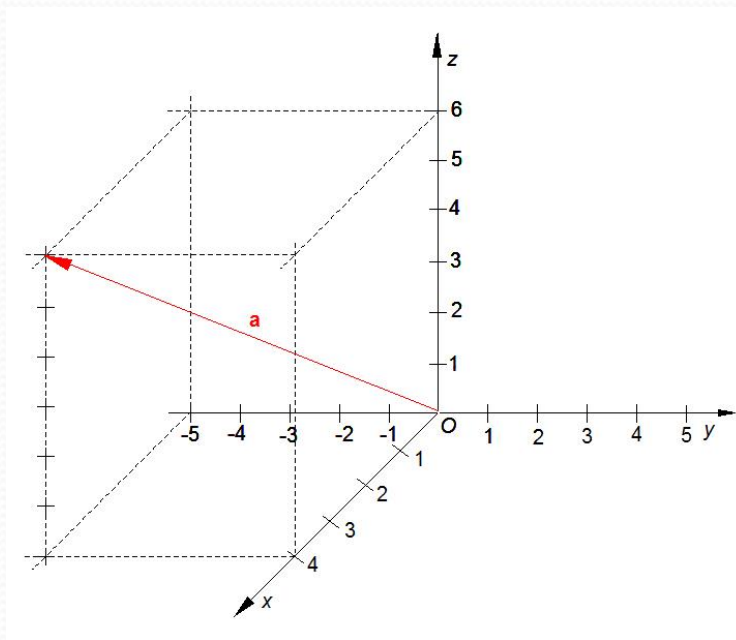
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

- g) jednotkový vektor **příslušný k vektoru $\mathbf{a}$** je dán předpisem

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right)$$

Příklad 2.1:

V ortonormální souřadnicové soustavě načrtněte vektor $\mathbf{a} = (4, -5, 6)$.



Příklad 2.2:

Ve trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 jsou dány body $A = [3, 7, -2]$ a $B = [-4, 0, 5]$. Napište souřadnice vektoru $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB} = B - A = (-4 - 3, 0 - 7, 5 - (-2)) = (-7, -7, 7)$$

Příklad 2.3:

Vypočtěte x, y, z z vektorové rovnice $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = (-3, 5, -1)$, $\mathbf{b} = (x + 2, y, -6 + 5z)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

$$(-3, 5, -1) = (x + 2, y, -6 + 5z) \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} -3 = x + 2 & \wedge & 5 = y \\ x = -5 & & y = 5 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{c} -1 = -6 + 5z \\ z = 1 \end{array}$$

Příklad 2.4:

Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = (1, -3, 8)$ a $\mathbf{b} = (-6, 0, -7)$.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, -3, 8) + (-6, 0, -7) = (1 + (-6), -3 + 0, 8 + (-7)) = (-5, -3, 1)$$

Příklad 2.5:

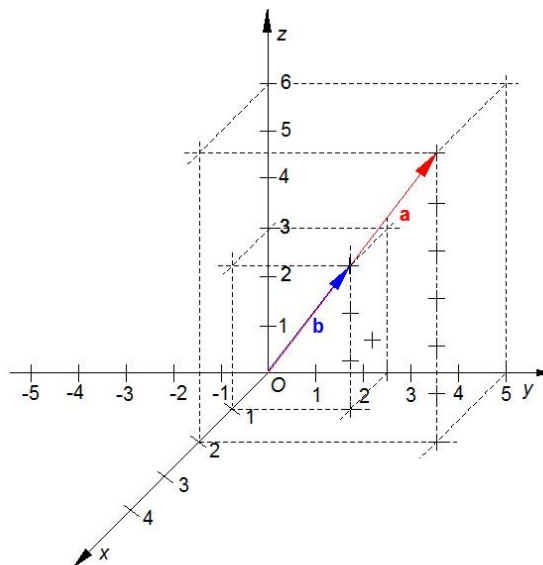
Určete souřadnice vektoru $\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$, kde $\mathbf{c} = (4, 5, -9)$ a $\mathbf{d} = (1, -8, 3)$.

$$\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = (4, 5, -9) - (1, -8, 3) = (4 - 1, 5 - (-8), -9 - 3) = (3, 13, -12)$$

Příklad 2.6:

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a}$, kde $\mathbf{a} = (2, 5, 6)$ a $\alpha = \frac{1}{2}$. Do obrázku načrtněte oba vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot (2, 5, 6) = (1, 5/2, 3)$$



Příklad 2.7:

Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (4, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -5)$ a $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{x}$, tak že platí $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = 2 \cdot (4, -1, 3) - 3 \cdot (0, 2, -5) + (1, 0, -1) = \\ &= (8, -2, 6) + (0, -6, 15) + (1, 0, -1) = (8 + 0 + 1, -2 + (-6) + 0, 6 + 15 + (-1)) = \\ &= (9, -8, 20) \end{aligned}$$

Příklad 2.8:

Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, -2)$ a $\mathbf{c} = (2, 1, -2)$. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{d}$, tak že platí $\mathbf{d} = 5 \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) + 3 \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}) - 2 \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= 5 \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) + 3 \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}) - 2 \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 5\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 5\mathbf{c} + 3\mathbf{c} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c} = \\ &= 3\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = 3 \cdot (0, -1, 5) + 8 \cdot (-1, 3, -2) + 0 \cdot (2, 1, -2) = \\ &= (0, -3, 15) + (-8, 24, -16) = (0 + (-8), -3 + 24, 15 + (-16)) = (-8, 21, -1)\end{aligned}$$

Příklad 2.9:

Na vybraných hranách krychle (viz obrázek) jsou dány vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. Napište vektory $\mathbf{AB}$, $\mathbf{EB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AH}$, $\mathbf{BD}$, $\mathbf{CE}$ jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{a}$$

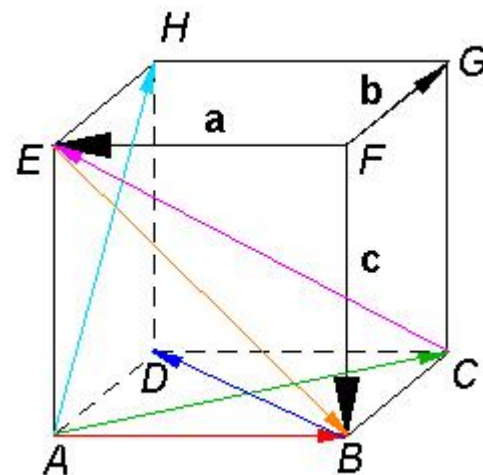
$$\mathbf{EB} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{AC} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{AH} = -\mathbf{c} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{BD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{CE} = -\mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{a}$$



2.7 Skalární součin

Skalárním součinem dvou vektorů **a**, **b** nazveme reálné číslo

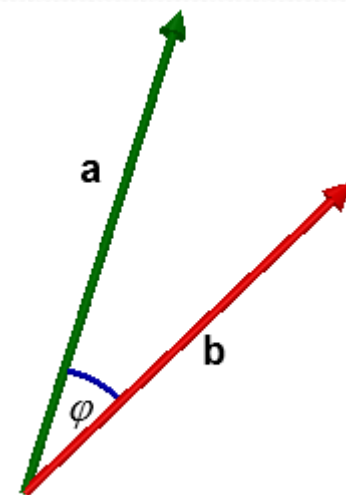
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi,$$

kde $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ jsou velikosti vektorů **a**, **b** a φ je velikost úhlu, který tyto dva vektory svírají. Pro úhel φ platí, že $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

Jsou-li vektory **a**, **b** určeny souřadnicemi, tj. je-li

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, pak je skalární součin vektorů **a**, **b** definován následovně

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$



Z definice skalárního součinu lze dokázat pro vektory **a**, **b**, **c** platnost následujících vlastností:

- a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- c) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, kde α je reálné číslo,
- d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, tj. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
- e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ právě když – buď vektor **a**, anebo vektor **b** je nulový vektor
– oba vektory **a** i **b** jsou nenulové a jsou na sebe navzájem **kolmé**

Úhel mezi vektory **a** a **b** můžeme vypočítat ze vztahu

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Příklad 2.10:

Vypočtete skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vektorů $\mathbf{a} = (0, -2, 3)$ a $\mathbf{b} = (-9, -1, 4)$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (0, -2, 3) \cdot (-9, -1, 4) = 0 \cdot (-9) + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 0 + 2 + 12 = 14$$

Příklad 2.11:

Rozhodněte, zda jsou dané vektory $\mathbf{a} = (1, 1, -2)$ a $\mathbf{b} = (-4, 2, -1)$ na sebe navzájem kolmé.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 1, -2) \cdot (-4, 2, -1) = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = -4 + 2 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ skalární součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ je roven nule, tzn. vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou na sebe kolmé

Příklad 2.12:

K danému vektoru $\mathbf{a} = (-1, 3, 5)$ najděte alespoň jeden kolmý vektor $\mathbf{b} = (x, 2, 3)$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1, 3, 5) \cdot (x, 2, 3) = -x + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = -x + 6 + 15 = -x + 21 = 0$$
$$x = 21$$

Jedním kolmým vektorem k vektoru $\mathbf{a}$ je vektor $\mathbf{b} = (21, 2, 3)$.

Příklad 2.13:

Vypočtete velikost vektoru $\mathbf{a} = (-1, 3, 5)$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

Příklad 2.14:

K danému vektoru $\mathbf{a} = (-1, 3, 5)$ najděte příslušný jednotkový vektor $\mathbf{u}$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right) = \left(\frac{-\sqrt{35}}{35}, \frac{3\sqrt{35}}{35}, \frac{5\sqrt{35}}{35} \right)$$

Příklad 2.15:

Spočtěte úhel, který svírají vektory $\mathbf{a} = (-3, 5, 4)$ a $\mathbf{b} = (-2, 2, 0)$.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{6 + 10 + 0}{\sqrt{9 + 25 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 0}} = \frac{16}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}} = \frac{16}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{16}{10\sqrt{4}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{4}{5} = 36,87^\circ$$

2.8 Vektorový součin

Vektorovým součinem dvou vektorů **a**, **b** nazveme vektor

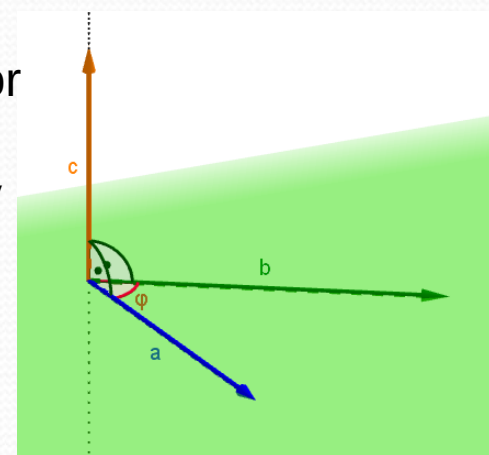
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

který je kolmý k oběma vektorům **a**, **b** a který je orientovaný tak, aby vektory **a**, **b**, **c** tvořily pravotočivý systém.

Pro velikost vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí vztah

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory **a**, **b**.



Jsou-li vektory **a**, **b**, **c** vyjádřeny v kartézských souřadnicích, tj. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, pak pro souřadnice vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí, že

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

a tedy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \mathbf{k}.$$

Výsledný vektor vektorového součinu můžeme také symbolicky zapsat ve tvaru determinantu

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Pro vektorový součin platí následující vlastnosti:

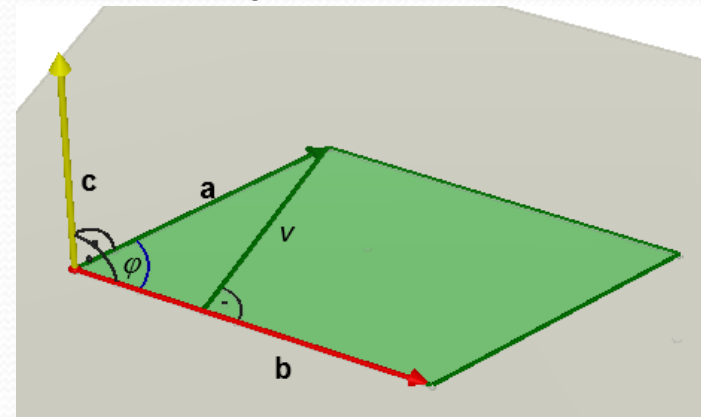
- a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (vzhledem ke smyslu otáčení)
- b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- d) $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, kde α je reálné číslo,
- e) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ právě když – buď vektor $\mathbf{a}$, anebo vektor $\mathbf{b}$ je nulový vektor
– oba vektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jsou nenulové a jsou navzájem rovnoběžné
- f) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$
- g) Velikost vektoru $\mathbf{c}$, který je výsledkem vektorového součinu nekolineárních vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, se rovná **velikosti** plochy rovnoběžníku, jehož strany jsou určeny vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Velikost výšky v rovnoběžníku lze zapsat ve tvaru

$$v = |\mathbf{a}| \cdot \sin \varphi$$

a pro jeho plochu platí

$$S = |\mathbf{b}| \cdot v = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi = |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



Příklad 2.16:

Vypočtete vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorů $\mathbf{a} = (3, -1, 5)$ a $\mathbf{b} = (4, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot ((-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 2) - \mathbf{j} \cdot (3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4) + \mathbf{k} \cdot (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4) = \mathbf{i} \cdot (-9) - \mathbf{j} \cdot (-23) + \mathbf{k} \cdot 10 = \\ &= (-9, 23, 10)\end{aligned}$$

Příklad 2.17:

Vypočtete plošný obsah rovnoběžníku $ABCD$, jehož strana AB je tvořena vektorem $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$ a strana AD vektorem $\mathbf{b} = (-2, 2, 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) - \mathbf{j} \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2)) + \mathbf{k} \cdot (3 \cdot 2 - 0 \cdot (-2)) = \mathbf{i} \cdot 2 - \mathbf{j} \cdot 1 + \mathbf{k} \cdot 6 = \\ &= (2, -1, 6)\end{aligned}$$

$$S = |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 1 + 36} = \sqrt{41}$$

Obecná rovnice roviny

Dosadíme-li do normálového tvaru rovnice roviny souřadnice bodů $M = [x_M, y_M, z_M]$, $X = [x, y, z]$ a souřadnice normálového vektoru $\mathbf{n} = (a, b, c)$, pak dostáváme

$$\mathbf{MX} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(X - M) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(x - x_M, y - y_M, z - z_M) \cdot (a, b, c) = 0,$$

$$ax + by + cz - (ax_M + by_M + cz_M) = 0.$$

Označíme-li $d = -(ax_M + by_M + cz_M)$, získáváme obvyklý tvar obecné rovnice roviny, tj.

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Nezapomeňme připomenout, že musí platit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Úsekový tvar rovnice roviny

Je-li $d \neq 0$, tj. neprochází-li rovina počátkem soustavy souřadnic, pak ji lze určit pomocí úseků, které vytíná na souřadnicových osách (této skutečnosti jsme použili při konstrukci stop roviny v Mongeově promítání).

Úsekový tvar rovnice roviny odvodíme z obecného tvaru rovnice roviny. Dle stanoveného předpokladu je $d \neq 0$, proto můžeme obecný tvar rovnice roviny vydělit číslem d . Potom píšeme

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$\frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d} \cdot y + \frac{c}{d} \cdot z + 1 = 0.$$

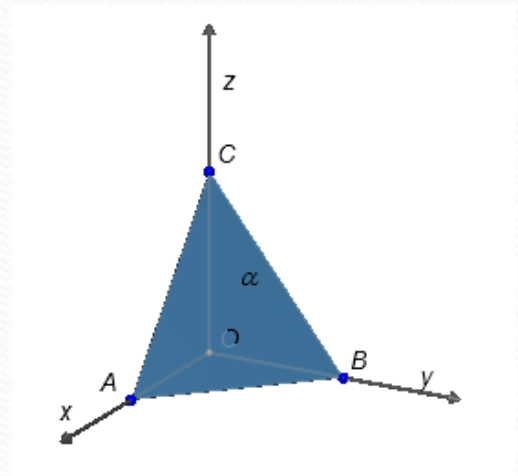
Je-li dále $a \cdot b \cdot c \neq 0$, můžeme psát

$$A = -\frac{d}{a}, B = -\frac{d}{b}, C = -\frac{d}{c}.$$

Poté následným dosazením dostáváme rovnici roviny v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1,$$

v níž čísla A, B, C určují úseky, v nichž rovina protíná souřadnicové osy.



Je-li některé číslo z trojice a, b, c rovno nule, pak je rovina rovnoběžná s příslušnou souřadnicovou osou. Např. je-li $b = 0$ a současně $a \cdot c \neq 0$, je daná rovina rovnoběžná s osou y a její úsekový tvar rovnice je

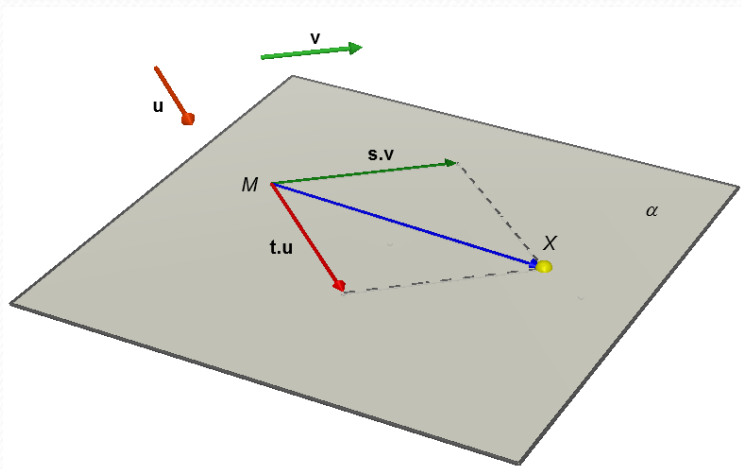
$$\frac{x}{A} + \frac{z}{C} = 1.$$

Vektorová rovnice roviny

Nechť je dána rovina, která prochází bodem $M = [x_M, y_M, z_M]$ a která je rovnoběžná se dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak libovolný bod $X = [x, y, z]$ roviny vytvoří s bodem M vektor $\mathbf{MX}$, který je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Můžeme tedy psát, že

$$\mathbf{MX} = X - M = t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v},$$

kde t, s jsou reálná čísla. Uvedená rovnice je vektorovou rovnicí roviny.



Parametrické rovnice roviny

Vyjádříme-li z vektorové rovnice roviny bod X , pak platí, že

$$X = M + t \mathbf{u} + s \mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Dosazením souřadnic vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a také souřadnic bodu M dostáváme, že pro souřadnice libovolného bodu X roviny platí

$$x = x_M + t u_1 + s v_1, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

$$y = y_M + t u_2 + s v_2$$

$$z = z_M + t u_3 + s v_3$$

Poznámka: Vyloučením reálných parametrů t , s z parametrického vyjádření roviny dostaneme obecný tvar rovnice roviny.

Příklad 2.18:

Rovina α je dána třemi nekolineárními body $A = [2, 1, 2]$, $B = [3, 2, 1]$ a $C = [-5, 1, -3]$. Zapište normálový, obecný, úsekový, vektorový a parametrický tvar její rovnice.

$$\mathbf{AB} = B - A = (3 - 2, 2 - 1, 1 - 2) = (1, 1, -1)$$

$$\mathbf{AC} = C - A = (-5 - 2, 1 - 1, -3 - 2) = (-7, 0, -5)$$

$$\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot (1 \cdot (-5) - (-1) \cdot 0) - \mathbf{j} \cdot (1 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-7)) + \mathbf{k} \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-7)) = \mathbf{i} \cdot (-5) - \mathbf{j} \cdot (-12) + \mathbf{k} \cdot 7 =$$

$$= (-5, 12, 7)$$

$$\mathbf{AX} \cdot \mathbf{n}^\alpha = 0$$

$$(\mathbf{X} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}^\alpha = 0$$

$$(x-2, y-1, z-2) \cdot (-5, 12, 7) = 0 \quad \dots \text{normálový tvar rovnice roviny}$$

$$-5 \cdot (x-2) + 12 \cdot (y-1) + 7 \cdot (z-2) = 0$$

$$-5x + 10 + 12y - 12 + 7z - 14 = 0$$

$$-5x + 12y + 7z - 16 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{16} \quad \dots \text{obecná rovnice roviny}$$

$$-\frac{5}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{7}{16}z - 1 = 0$$

$$\frac{x}{-\frac{16}{5}} + \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{z}{\frac{16}{7}} = 1 \quad \dots \text{úsekový tvar rovnice roviny}$$

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \quad t, r \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{A} = t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}$$

$$(x-2, y-1, z-2) = t \cdot (1, 1, -1) + r \cdot (-7, 0, -5) \quad \dots \text{vektorový tvar rovnice roviny}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \quad t, r \in \mathbf{R}$$

$$x = 2 + t - 7r$$

$$y = 1 + t$$

$$z = 2 - t - 5r, \quad t, r \in \mathbf{R} \quad \dots \text{parametrický tvar rovnice roviny}$$

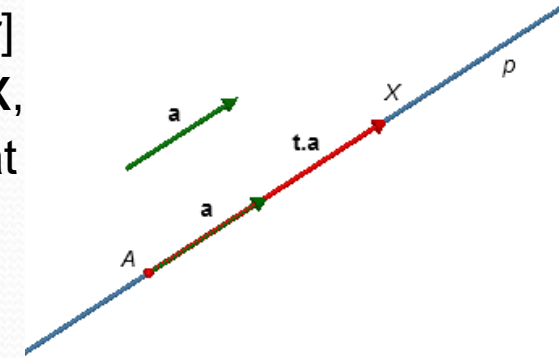
Rovnice přímky

Vektorová rovnice přímky

Uvažujme přímku p procházející bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ rovnoběžně s nenulovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Vektor $\mathbf{a}$ nazýváme **směrovým vektorem** přímky p . Libovolný bod $X = [x, y, z]$ ležící na přímce p určí společně s bodem A vektor $\mathbf{AX}$, který musí být násobkem vektoru $\mathbf{a}$. Proto můžeme psát

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{a},$$

kde t je reálné číslo, tzv. parametr bodu X .



Parametrické vyjádření přímky

Přepíšeme-li vektorovou rovnici přímky pomocí bodů A , X , dostáváme

$$X - A = t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dosazením souřadnic bodů A , X a vektoru $\mathbf{a}$ do uvedené rovnice dostaneme trojici tzv. parametrických rovnic přímky

$$x = x_A + t \cdot a_1, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$y = y_A + t \cdot a_2$$

$$z = z_A + t \cdot a_3.$$

Poznámka: Různé body přímky p jsou od sebe odlišeny jinou hodnotou parametru $t \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Směrový vektor přímky p není určen jednoznačně. Je-li vektor $\mathbf{a}$ směrovým vektorem přímky, pak je jím i vektor $\mathbf{s} = k \cdot \mathbf{a}$, kde $k \neq 0$ a $k \in \mathbf{R}$.

Kanonický tvar rovnice přímky

Jsou-li všechny tři souřadnice směrového vektoru přímky nenulová čísla, můžeme z trojice parametrických rovnic přímky vyjádřit parametr $t \in \mathbf{R}$, čímž získáme kanonický tvar rovnice přímky

$$t = \frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} = \frac{z - z_A}{a_3}.$$

Poznámka: Tento systém rovnic je ekvivalentní parametrickým rovnicím přímky.

Přímka jako průsečnice rovin

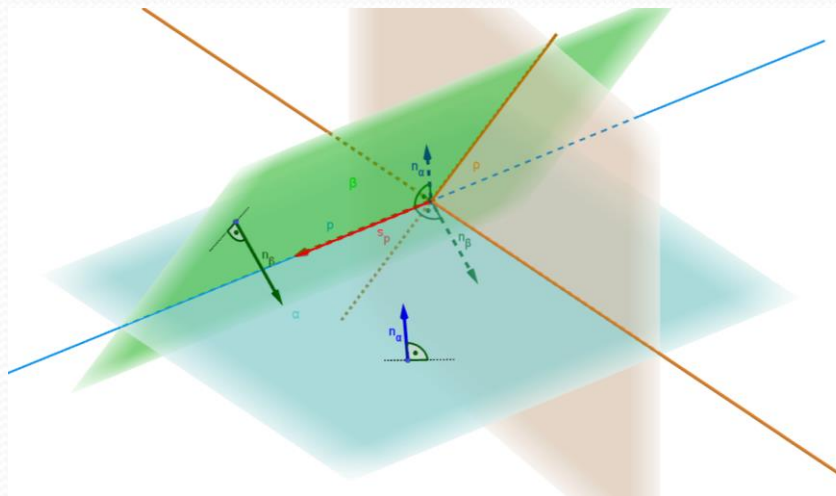
Přímka p může být také určena jako průsečnice dvou rovin α , β . Potom její rovnice je určena soustavou obecných rovnic rovin α , β , tj.

$$\alpha: a^\alpha x + b^\alpha y + c^\alpha z + d = 0,$$

$$\beta: a^\beta x + b^\beta y + c^\beta z + d = 0.$$

Uvedená soustava dvou rovnic pro tři neznámé má nekonečně mnoho řešení (ale jen v případě, že roviny nejsou rovnoběžné). Řešení soustavy rovnic závisí na jednom parametru. Odtud pak dostáváme parametrické vyjádření přímky.

Poznámka: Směrový vektor $\mathbf{s}_p$ přímky p je kolmý na normálové vektory $\mathbf{n}^\alpha$, $\mathbf{n}^\beta$ rovin α , β , proto může být určen jako výsledek jejich vektorového součinu, tj. $\mathbf{s}_p = \mathbf{n}^\alpha \times \mathbf{n}^\beta$.



Příklad 2.19:

Přímka p je dána svými dvěma body $A = [1, -2, -1]$ a $B = [4, -3, 2]$. Napište vektorový, parametrický a kanonický tvar její rovnice.

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB} = B - A = (4 - 1, -3 - (-2), 2 - (-1)) = (3, -1, 3)$$

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$X - A = t \cdot \mathbf{a}$$

$$(x - 1, y + 2, z + 1) = t \cdot (3, -1, 3), \quad t \in \mathbf{R} \quad \dots \text{vektorový tvar}$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$x = 1 + 3t$$

$$y = -2 - t$$

$$z = -1 + 3t, \quad t \in \mathbf{R} \quad \dots \text{parametrický tvar}$$

$$t = \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z + 1}{3}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \dots \text{kanonický tvar}$$