

ŠROUBOVICE

Šroubovice je prostorová křivka daná vektorovou rovnicí $\mathbf{r}(t) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Z rovnic $x = a \cdot \cos t$, $y = a \cdot \sin t$ plyne, že x-ové a y-ové souřadnice vektorové rovnice šroubovice určují kružnici o poloměru a ležící v souřadnicové rovině xy . Rovnice $z = bt$ popisuje posunutí ve směru osy z .

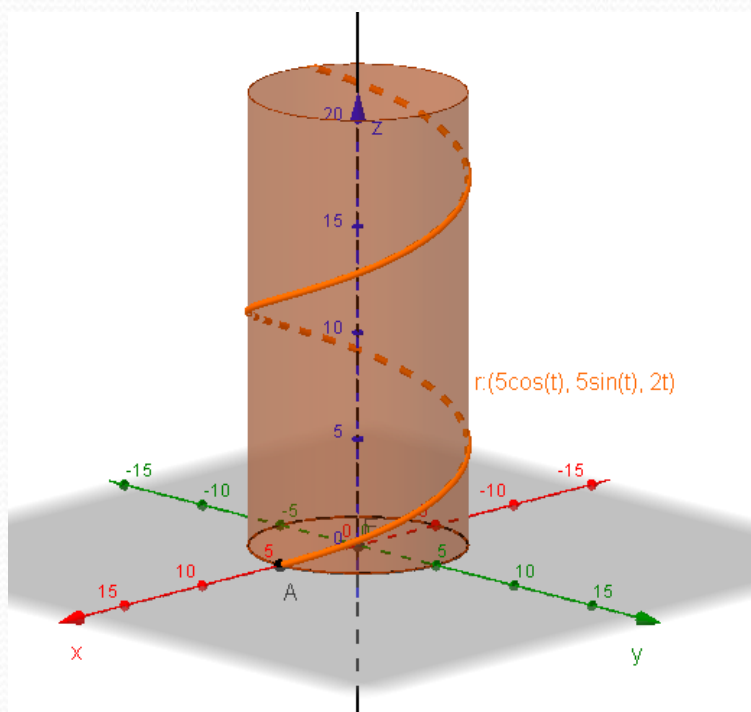
Definice:

Šroubovice je dráha bodu, který se otáčí kolem osy z (tzv. **osa šroubovice**) a který se zároveň posouvá ve směru osy z . Platí, že velikost posunutí bt ve směru osy z je přímo úměrná velikosti otočení t kolem osy z .

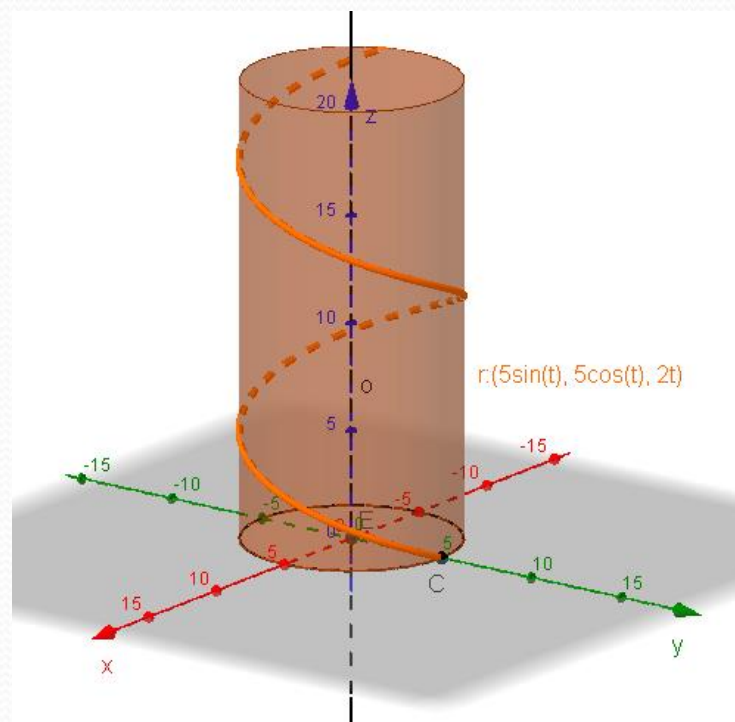
Definice:

Šroubový pohyb vzniká složením rovnoměrného otáčivého pohybu kolem pevné přímky o (tzv. **osa šroubového pohybu**) a rovnoměrného posuvného pohybu ve směru přímky o .

Šroubovice je trajektorie bodu, který je podroben šroubovému pohybu. Je-li osa o šroubového pohybu svislá, pak **šroubový pohyb**, při němž se tvořící bod otáčí kolem osy o **proti** směru hodinových ručiček, nazýváme **po** **pravotočivý** a příslušnou **šroubovici** nazýváme **pravotočivou**. **levotočivý** **levotočivou**

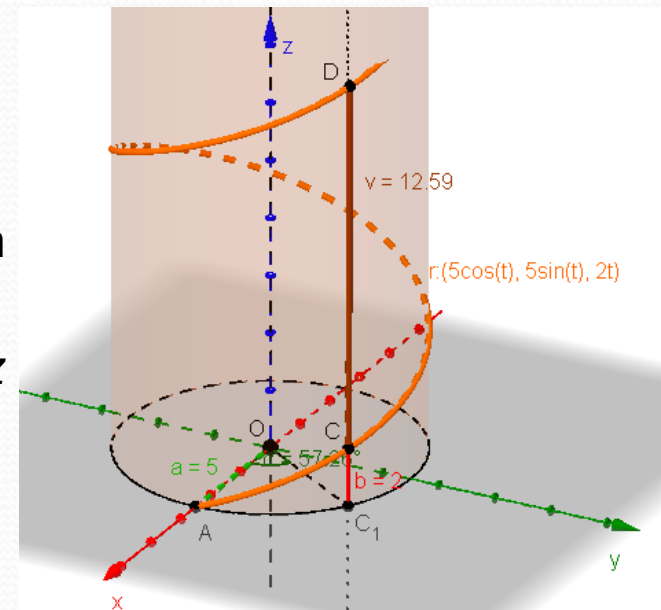


pravotočivá šroubovice



levotočivá šroubovice

Poznámka: Šroubovice popsaná vektorovou rovnicí $\mathbf{r}(t) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, vznikla jako trajektorie tvořícího bodu A, ležícího na ose x, při pravotočivém šroubovém pohybu s osou $o \equiv z$, kde úsečka OA má velikost a a rychlost posouvání ve směru osy z je b .



Definice:

Označíme-li (v obloukové míře) t velikost otočení, pak velikost posunutí příslušného k otočení o $t = 2\pi$ radiánů nazýváme **výška závitu v**

$$t = 1 \text{ rad} = 57,296^\circ$$

redukována výška závitu b

šroubového pohybu.

Poznámka: Pro výšku závitu v a redukovanou výšku závitu b platí následující vztah

$$v = 2\pi \cdot b.$$

K určení **šroubového pohybu** je nutné znát:

- ✓ osu šroubového pohybu o ,
- ✓ výšku závitu v nebo redukovanou výšku závitu b ,
- ✓ smysl šroubového pohybu (pravotočivý či levotočivý).

K určení šroubovice je nutné znát:

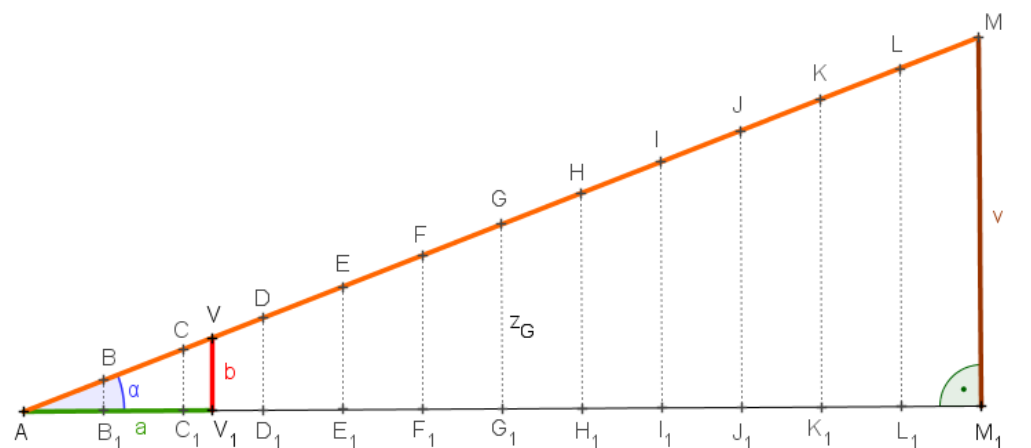
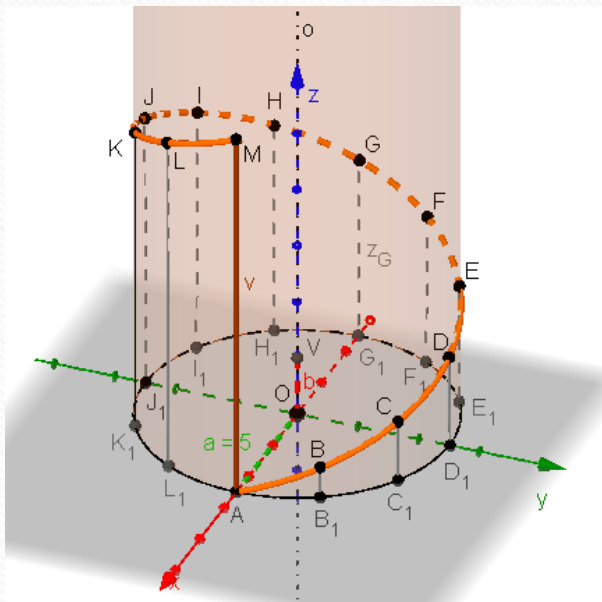
- ✓ šroubový pohyb,
- ✓ tvořící bod šroubovice.

Symbolicky píšeme šroubovice $(A, o, b, \{\pm\})$ a čteme šroubovice určená tvořícím bodem A , osou šroubového pohybu o , redukovanou výškou závitu b a informací o pravotočivosti či levotočivosti šroubovice.

Charakteristický trojúhelník šroubovice

Šroubovice leží na **rotační válcové ploše** s osou o totožnou s osou šroubovice a s poloměrem a rovným vzdálenosti tvořícího bodu A šroubovice od osy o .

Na obrázku je zakreslen **jeden závit šroubovice** omezený body A , M a rozvinutí části válcové plochy o výšce jednoho závitu v . Řídící kružnice válcové plochy se rozvine do úsečky AM_1 délky $2\pi a$ (obvod řídicí kružnice), šroubovice se rozvine do úsečky AM , která je přeponou pravoúhlého trojúhelníka AM_1M s odvěsnami $|AM| = 2\pi a$ a $|M_1M| = v$. Pravoúhlý trojúhelník AM_1M nazveme **charakteristický trojúhelník šroubovice**.



Pomocí charakteristického trojúhelníku šroubovice lze při řešení konstruktivních úloh o šroubovici nalézt

Redukovanou výšku závitu b při známé výšce závitu v a naopak

Vzhledem ke skutečnosti, že redukovaná výška závitu b je velikost posunutí, které přísluší k otočení o úhel t rovný 1 radiánu, stačí v charakteristickém trojúhelníku AM_1M šroubovice nanést na polopřímku AM_1 délku poloměru a řídicí kružnice válcové plochy, na níž šroubovice leží, a úsečka BV , ($a = |MB|$, bod B leží na polopřímce MN a bod V leží na polopřímce MM' charakteristického trojúhelníku MNM' šroubovice), která je kolmá k polopřímce MN má délku b .

Posunutí Δz příslušné k otočení o úhel t a naopak

Otočení o úhel t měříme velikostí oblouku $MX_1 = at$ řídicí kružnice válcové plochy, na níž šroubovice leží. Délku velikosti posunutí Δz získáme v charakteristickém trojúhelníku MNM' šroubovice a to následujícím způsobem. Na úsečce MN sestrojíme bod X_1 tak, aby $|MX_1| = at$. Bodem X_1 dále sestrojíme kolmici k polopřímce MN . Ta nám protne polopřímku MM' v bodě X . Pak platí, že $|XX_1| = \Delta z$ příslušné k otočení o úhel t .

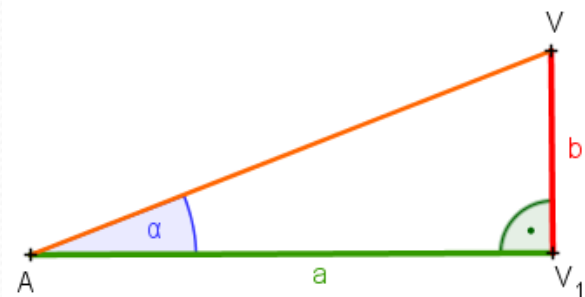
Úhel, který svírají tečny šroubovice s rovinou kolmou k její ose

Všechny tečny šroubovice svírají s rovinou kolmou k její ose *konstantní úhel* α , který je roven velikosti úhlu při vrcholu A v charakteristickém trojúhelníku AV_1V šroubovice. Úhel α nazýváme **sklonem šroubovice**.

Poznámka: Z charakteristického trojúhelníku AV_1V šroubovice lze odvodit, že platí

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a,$$

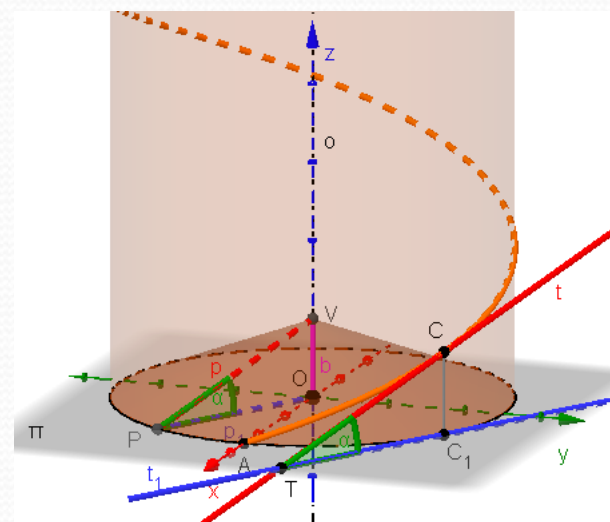
kde $\operatorname{tg} \alpha$ nazýváme **spádem šroubovice**.



Řídicí kuželová plocha šroubovice

Řídicí kuželovou plochou šroubovice nazýváme kuželovou plochu, jejíž površky p jsou rovnoběžné s tečnami t šroubovice. V promítání, v němž je osa o šroubovice kolmá k půdorysně, volíme vrchol V řídicí kuželové plochy na ose o tak, že $z_V = b$. Pak je řídicí kružnice šroubovice množinou půdorysných stopníků površek p řídicí kuželové plochy.

Je-li řídicí kuželová plocha šroubovice určena, lze sestavovat tečny šroubovice jako rovnoběžky s površkami řídicí kuželové plochy.

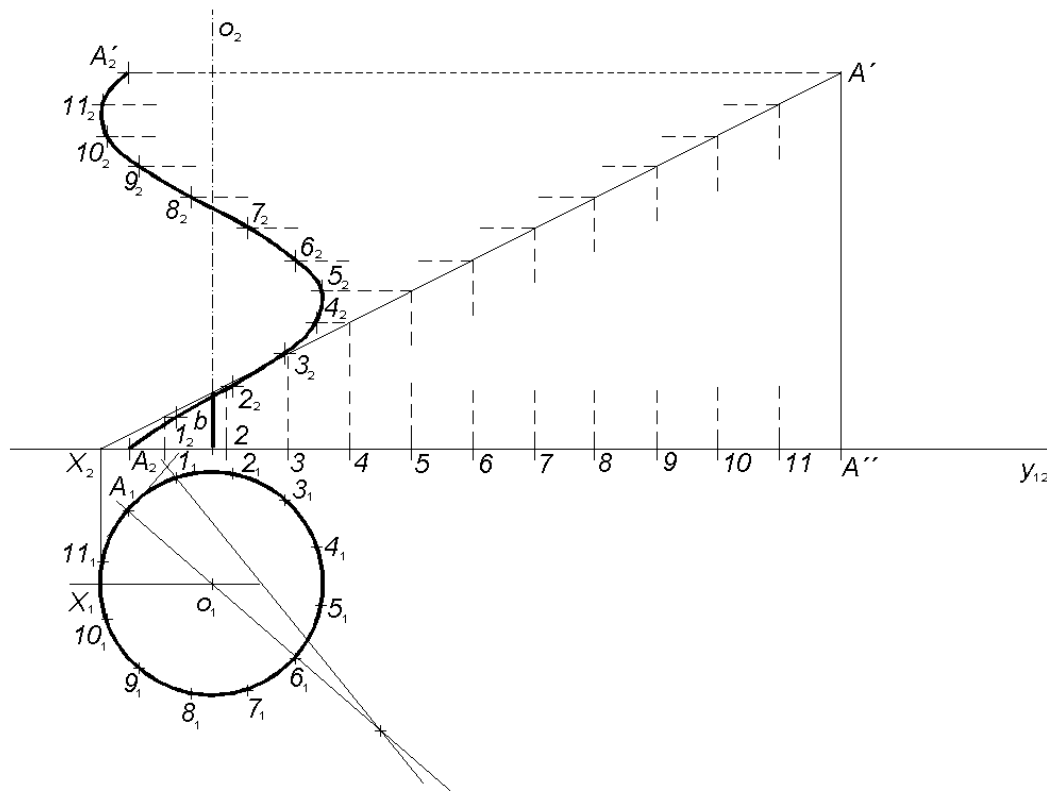


Zobrazení šroubovice v Mongeově promítání

Při zobrazování šroubovice v Mongeově promítání zpravidla volíme osu o šroubovice kolmou k půdorysně.

Na obrázku je znázorněn půdorys a nárys levotočivé šroubovice s osou o , výškou závitu v a s tvořícím bodem A . Jsou sestrojeny průměty 12 bodů šroubovice postupným otáčením bodu A o úhel $2\pi/12$ (k otočení o úhel $\pi/6$ přísluší posunutí o $v/12$).

Půdorysem šroubovice je kružnice, nárysem obecná sinusoida.

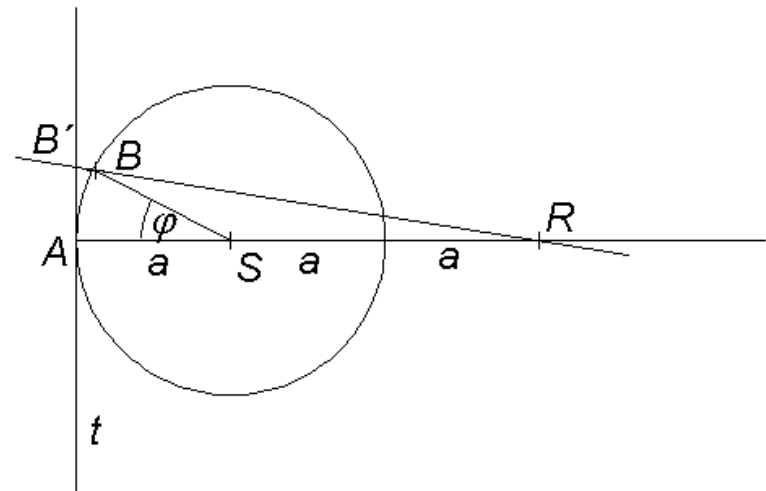


Sobotkova rektifikace

Při řešení konstruktivních úloh o šroubovici potřebujeme konstruktivně určit délku oblouku kružnice, tj. potřebujeme umět převést délku oblouku na úsečku (tzv. **rektifikace oblouku kružnice**). Budeme používat tzv. **Sobotkovu rektifikaci**.

Nechť je dána kružnice k se středem S a s poloměrem a . V bodě A oblouku AB sestrojíme tečnu t kružnice k . Na polopřímce AS sestrojíme bod R tak, aby $|AR| = 3a$. Promítneme-li bod B z bodu R na tečnu t , získáme bod B' . Pak $|AB'|$ je (přibližně) rovna délce oblouku AB . Tato konstrukce je dostatečně přesná, pokud je středový úhel φ roven maximálně 30° . Pro větší středové úhly, tj. pro středové úhly $\varphi > 30^\circ$, provedeme rektifikaci po částech.

Uvedenou konstrukci lze použít i obráceně, tj. i pro navinutí úsečky AB' na kružnici k .



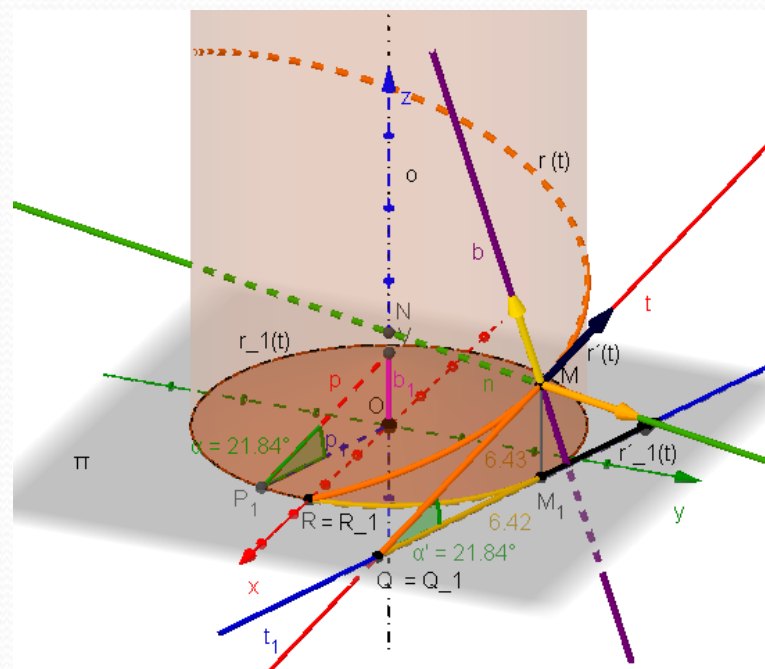
Průvodní trojhran šroubovice v Mongeově promítání

Tečna šroubovice

V každém bodě šroubovice je definována její tečna. Všechny tečny šroubovice se do roviny π kolmé na osu o šroubovice promítají na tečny řídicí kružnice. Všechny tečny šroubovice svírají s rovinou π tentýž úhel α , pro který platí rovnost

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a.$$

Protíná-li šroubovice rovinu π v bodě R a protíná-li tečna t sestrojená v bodě M šroubovice rovinu π v bodě Q , pak velikost oblouku R_1M_1 na řídicí kružnici je rovna velikosti úsečky Q_1M_1 na přímce t_1 , tj. $|R_1M_1| = |Q_1M_1|$. Přitom body R_1, Q_1, M_1 jsou pravoúhlými průměty bodů R, Q, M do roviny π a poněvadž body R a Q leží v půdorysně, platí, že $R = R_1$ a $Q = Q_1$. Přímka t_1 je půdorysem tečny t .



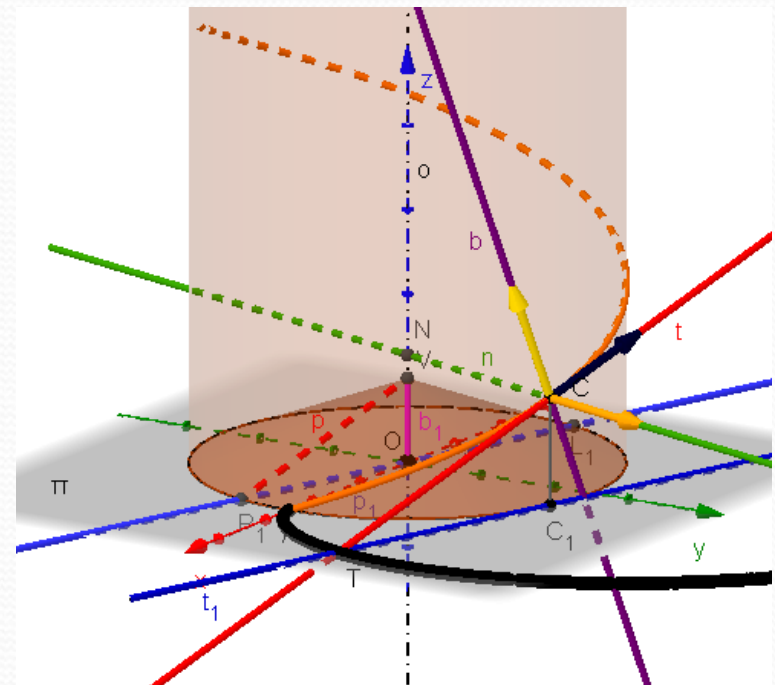
Hlavní normála šroubovice

Hlavní normála n šroubovice je definována v každém bodě šroubovice. Je vždy kolmá na osu o šroubovice a osu o šroubovice protíná.

Půdorys n_1 hlavní normály n prochází prvním průmětem osy o šroubovice, tj. bodem o_1 , kolmo na první průmět t_1 tečny t sestrojené v půdorysu C_1 daného bodu C . Přitom platí, že $n_1 = o_1C_1$. Nárys n_2 hlavní normály n je přímka procházející druhým průmětem C_2 daného bodu C rovnoběžně se základnicí y_{12} .

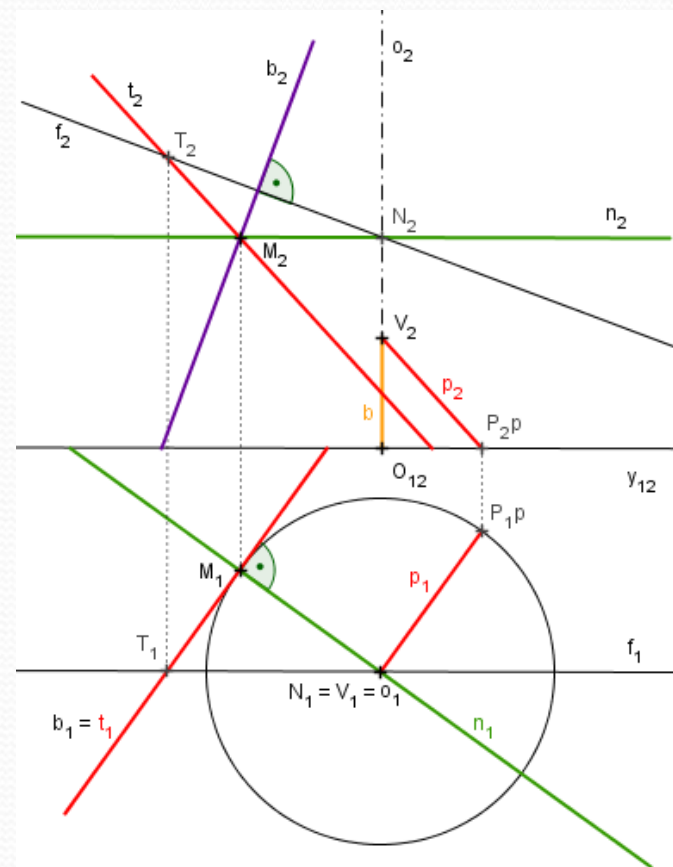
Oskulační rovina šroubovice

Tečna t a hlavní normála n sestrojené v bodě C šroubovice tvoří v tomto bodě oskulační rovinu šroubovice. Z průmětů přímky n plyne, že přímka n je horizontální přímkou oskulační roviny.



Binormála

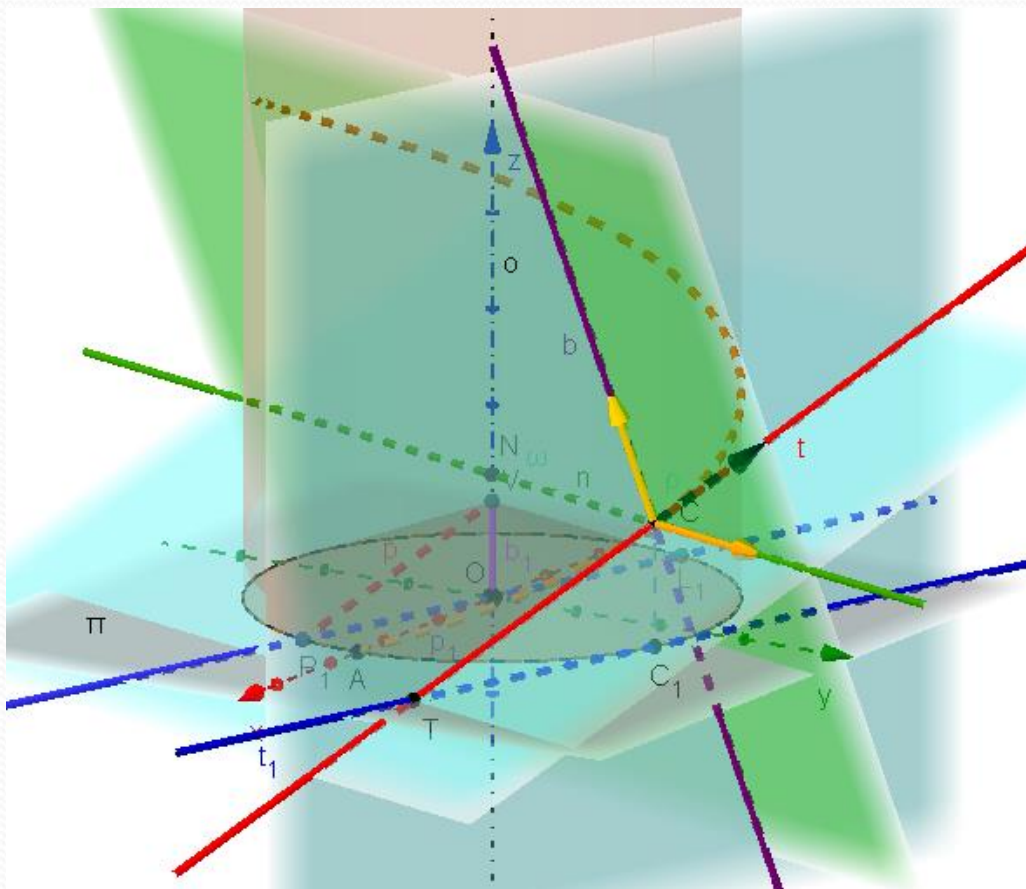
Binormála je kolmice k oskulační rovině $\omega = (t, n)$. V Mongeově promítání potom tedy platí, že její průměty jsou kolmé ke stopám (anebo k odpovídajícím průmětům hlavních přímk) oskulační roviny. Vzhledem ke skutečnosti, že hlavní normála n je horizontální přímkou oskulační roviny, je první průmět b_1 binormály b sestrojené v bodě C kolmý k prvnímu průmětu n_1 normály n . Z toho dále plyne, že přímka b_1 splývá s přímkou t_1 , tj. s prvním průmětem tečny t sestrojené v bodě C šroubovice. Nárys b_2 binormály je kolmý k nárysné stopě oskulační roviny, anebo k druhému průmětu frontální přímky f , kterou lze v oskulační rovině dohledat.



Normálová a rektifikační rovina šroubovice

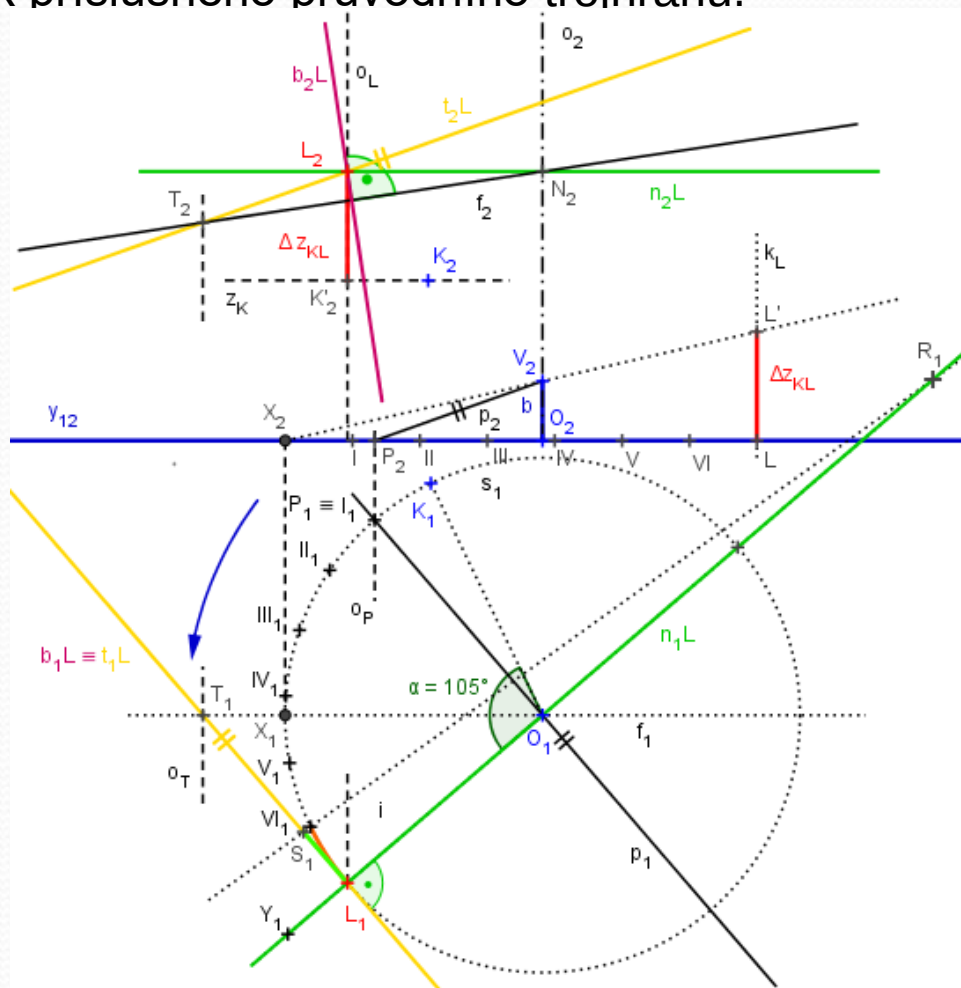
Normálová rovina ν v bodě C šroubovice je tvořena binormálou b a hlavní normálou n sestrojenými v uvedeném bodě.

Rektifikační rovina ρ v bodě C šroubovice je tvořena binormálou b a tečnou t sestrojenými v uvedeném bodě.



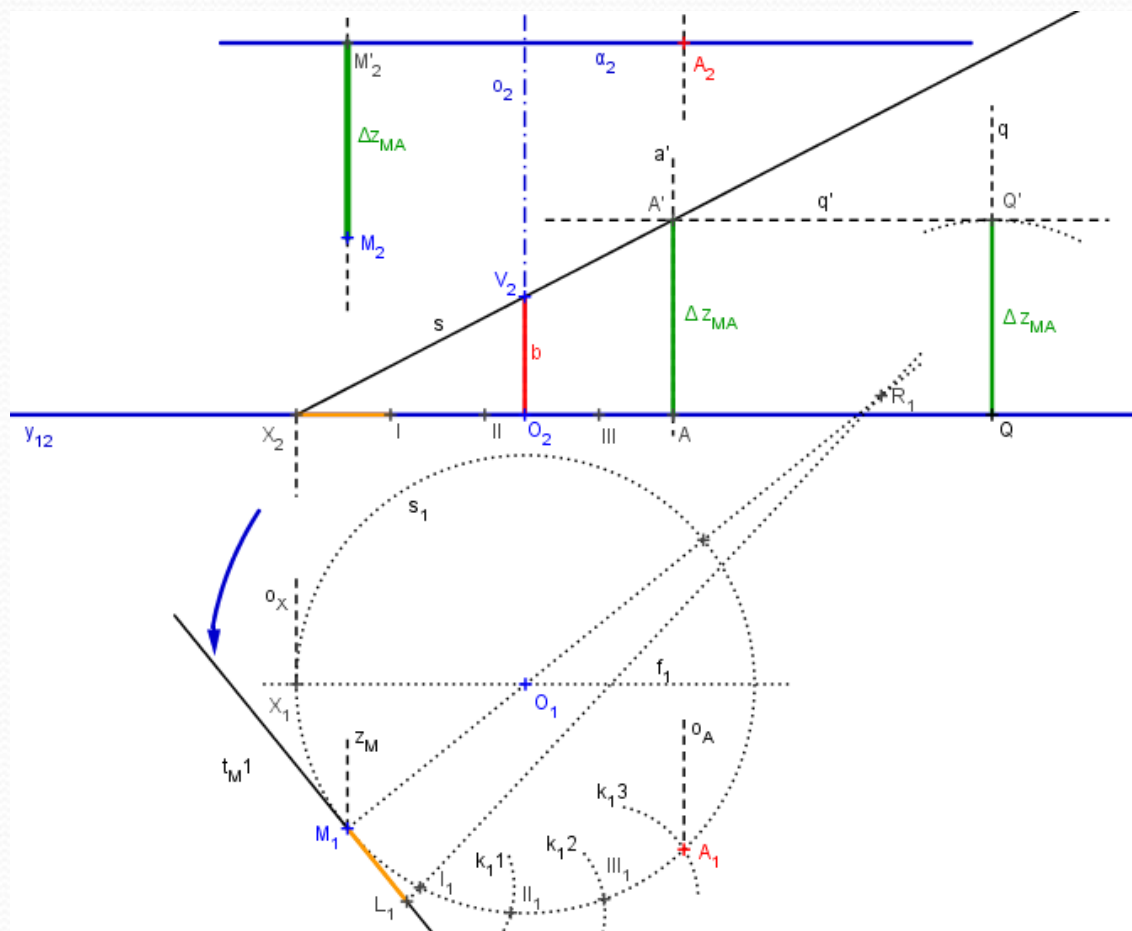
Příklad 3.1:

Pravotočivá šroubovice prochází bodem K $[10, -25, 35]$, má redukovanou výšku závitu $b = 13$ a osu $o \perp \pi$, $O \in o$, O $[60, 0, 0]$. Bod K přešroubujte do bodu L o úhel $t = 105^\circ$. Přitom platí, že $z_L > z_K$. V bodě L dané šroubovice sestrojte průměty přímek příslušného průvodičního trojhranu.



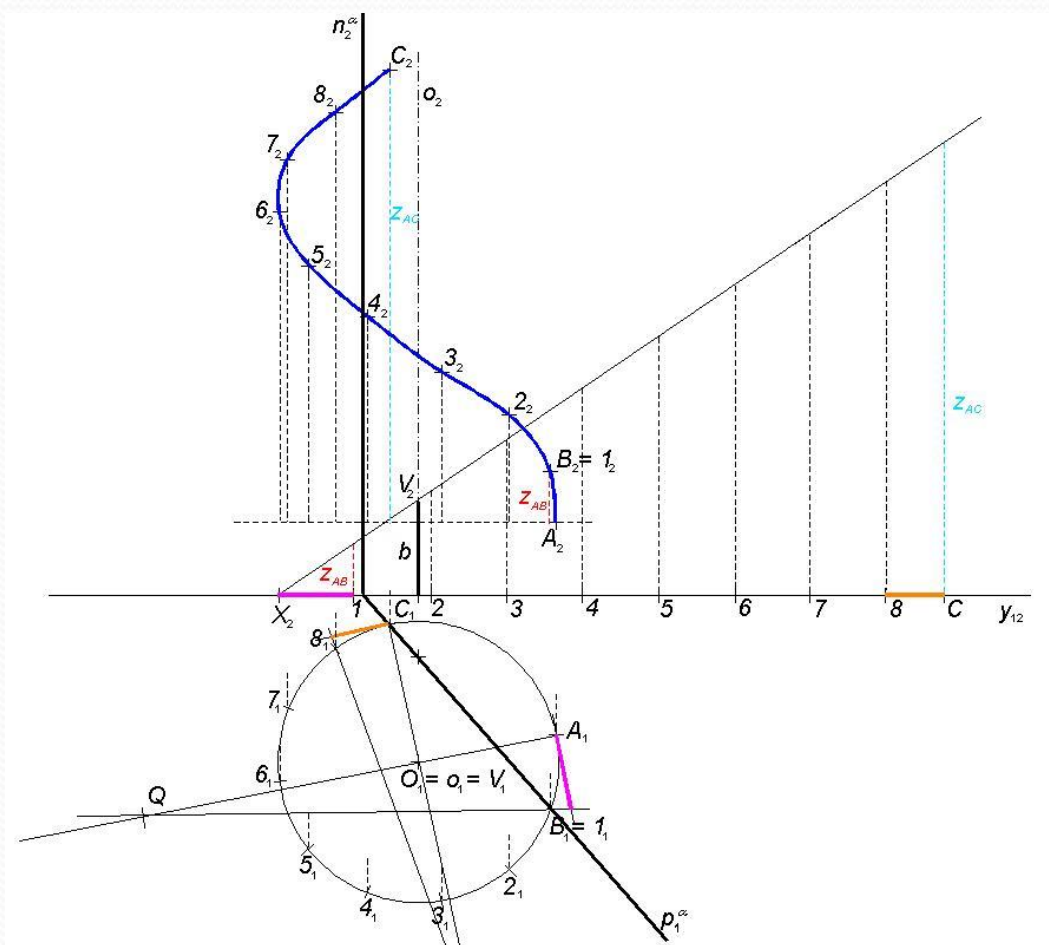
Příklad 3.2:

Pravotočivá šroubovice prochází bodem M $[75, -20, 30]$, má redukovanou výšku závitu $b = 20$ a osu $o \perp \pi$, $O \in o$, O $[45, 0, 0]$. Najděte průsečík A dané šroubovice s rovinou α $(+\infty, +\infty, 65)$ ($\alpha \perp o$).



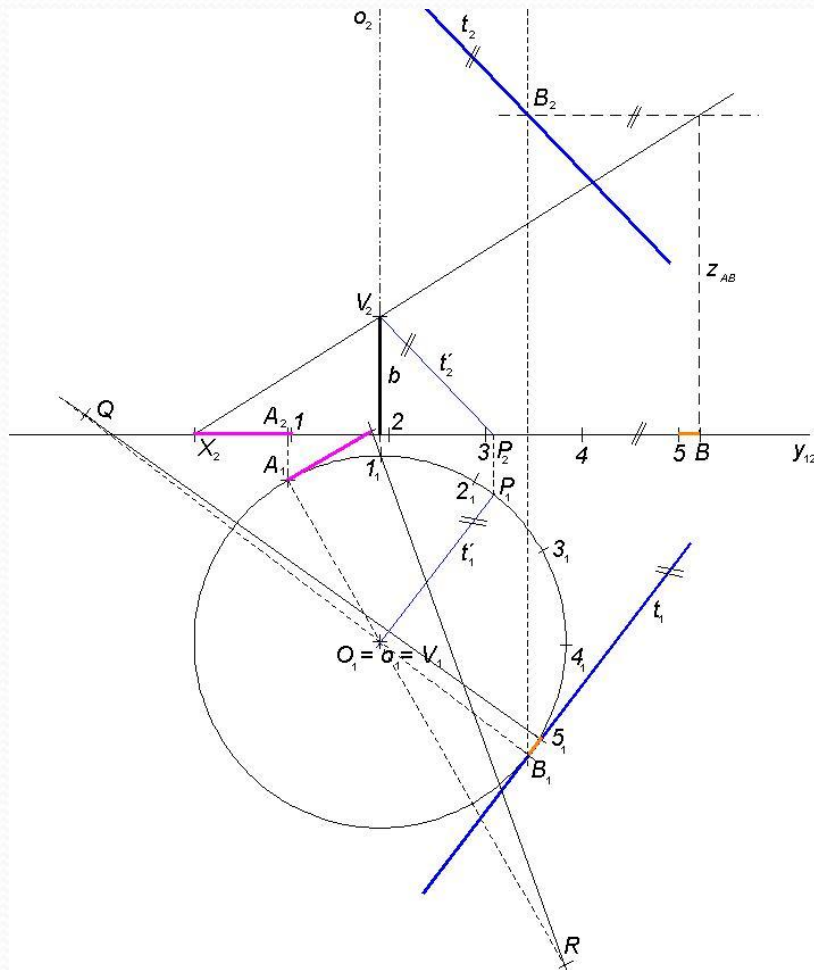
Příklad 3.3:

Levotočivá šroubovice prochází bodem A $[30, 30, 16]$, má redukovanou výšku závitu $b = 20$ a osu $o \perp \pi$, $O \in o$, O $[36, 0, 0]$. Sestrojte její průsečíky B , C s rovinou ρ $(13, -12, +\infty)$, které jsou na jednom závitu s bodem A . Sestrojte také část nárysu šroubovice omezené body A , C .



Příklad 3.4:

Levotočivá šroubovice prochází bodem $A [10, -20, 0]$, má redukovanou výšku závitu $b = 25$ a osu $o \perp \pi$, $O \in o$, $O [45, 0, 0]$. Bod A přešroubujte do bodu $B [x_B, 32, z_B]$, kde $x_B > 45$ a $z_B > z_A$. V bodě B sestrojte tečnu ke šroubovici.



Ukázky šroubovice v praxi

