

DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE KŘIVEK

Cílem této přednášky není prezentovat kompletní teorii vektorových funkcí a diferenciální geometrii křivek, ale nastínit jen tu část, která nám umožní definovat pojem křivky a popsat základní vlastnosti křivek.

Křivku lze definovat různě, a to v závislosti na okolnostech či metodách, které můžeme užít. Přesná definice křivky ovšem značně přesahuje rámec této přednášky.

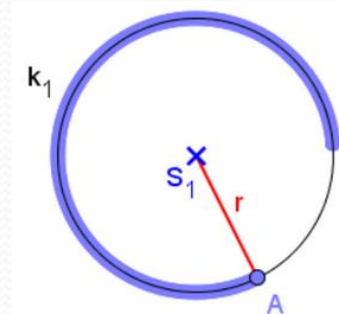
Pro naše potřeby budeme vhodně definovat křivky, které známe z jiných oblastí matematiky. Např. kružnici nebo elipsu definujeme geometricky jako množiny všech bodů určitých vlastností. Exponenciálu (resp. též logaritmickou křivku) nebo např. sinusoidu definujeme jako grafy reálných funkcí jedné proměnné. Některé křivky jako např. cykloidu, asteroidu, kardioidu, aj. definujeme kinematicky, tj. jako dráhy bodů při konkrétních pohybech.

Příklady rovinných křivek podle jejich různého definování

1) Křivky jako množiny všech bodů daných vlastností

Kružnice

Kružnicí rozumíme množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S_1 stejnou vzdálenost r , kde $r \in \mathbf{R}$.

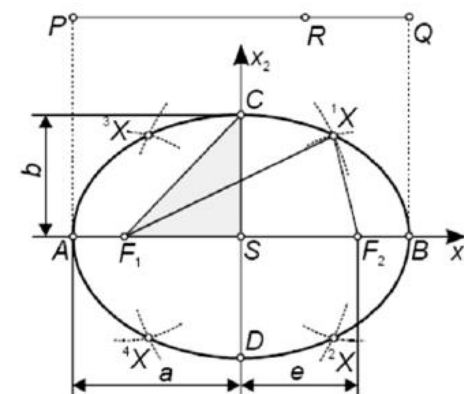


Elipsa

Množinu všech bodů v rovině E_2 , které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností rovný $2a$, nazýváme **elipsa**. Tj. platí

$$k_e = \{X \in E_2: |XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{konst.}, 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$

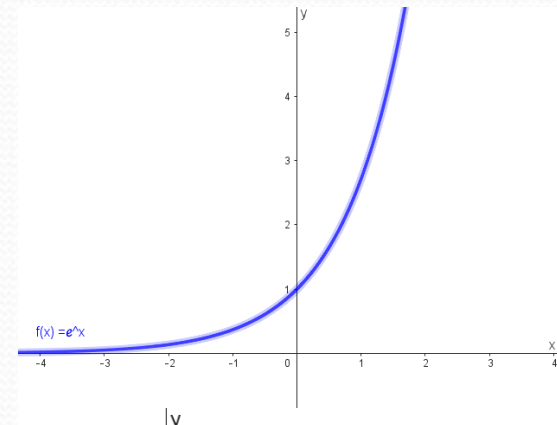
Dané pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**, spojnicím XF_1, XF_2 říkáme **průvodiče**. Střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed** elipsy. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost (excentricita)** a označuje se $e = |SF_1| = |SF_2|$.



2) Křivky jako grafy reálných funkcí jedné reálné proměnné

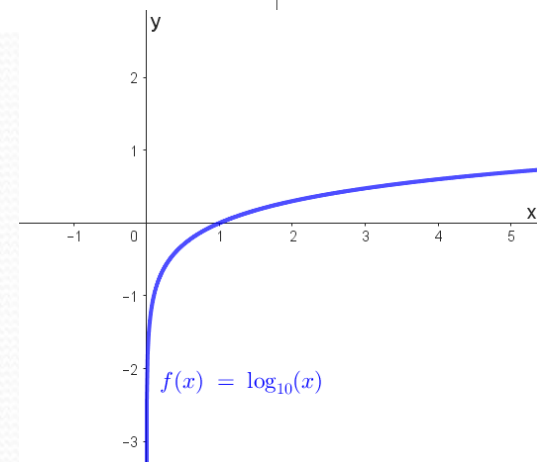
Exponenciála

Exponenciálou nazýváme křivku, která je grafem funkce dané předpisem $y = f(x) = e^x$, kde $x \in \mathbf{R}$



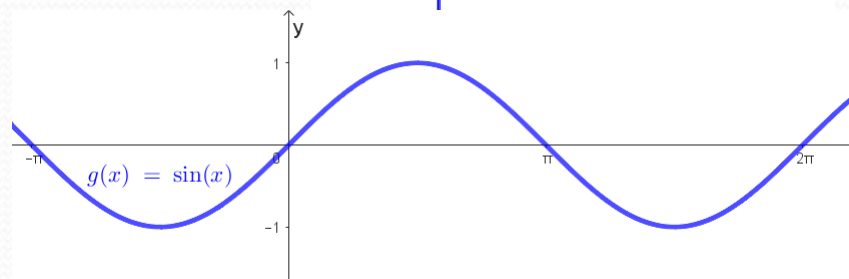
Logaritmická křivka

Logaritmickou křivkou nazýváme křivku, která je grafem funkce dané předpisem $y = f(x) = \log x$, kde $x \in (0, +\infty)$.



Sinusoida

Sinusoidou nazýváme křivku, která je grafem funkce dané předpisem

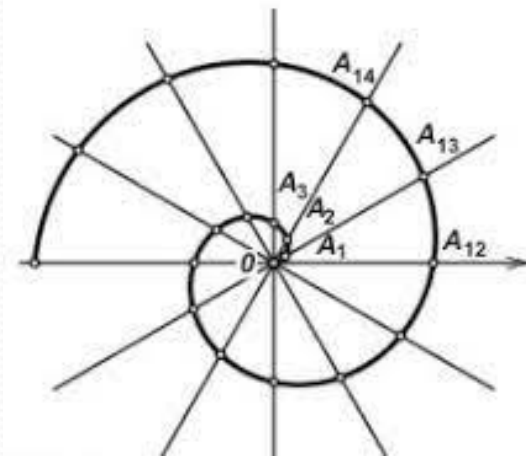


3) Křivky vznikající kinematically, tj. jako dráhy při speciálních pohybech

Archimédova spirála

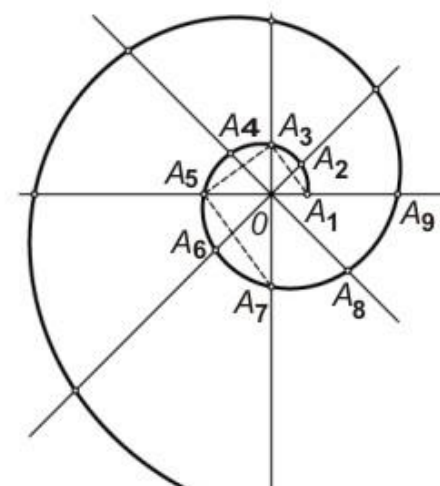
Archimédova spirála je trajektorií bodu A , který se rovnoměrně posunuje po polopřímce OA od jejího počátku O , zatímco se polopřímka OA rovnoměrně otáčí kolem bodu O .

Archimédovu spirálu lze také definovat jako rovinnou transcendentní křivku (spirálu), jejíž poloměr roste lineárně s velikostí úhlu.



Logaritmická spirála

Logaritmickou spirálou nazýváme křivku, jejíž poloměr roste lineárně s velikostí úhlu.



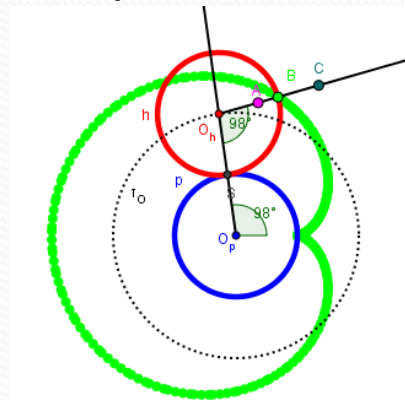
Cyklické křivky

- křivky, které jsou trajektoriemi bodu, jenž je pevně spojený s kružnicí, která se odvaluje/kotálí po jiné pevné kružnici nebo po pevné přímce

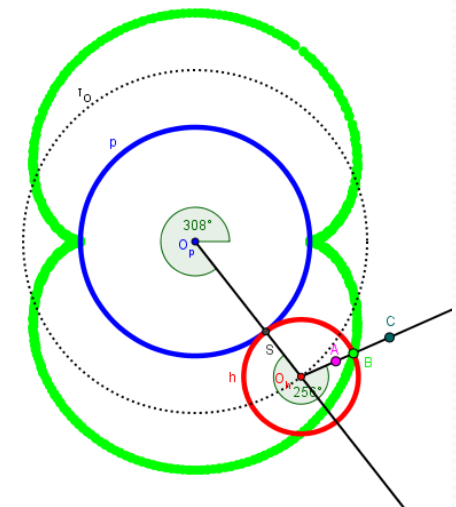
a) Kružnice odvalující se po pevné kružnici

- **epicykloidy** - hybná kružnice se odvaluje vně pevné kružnice

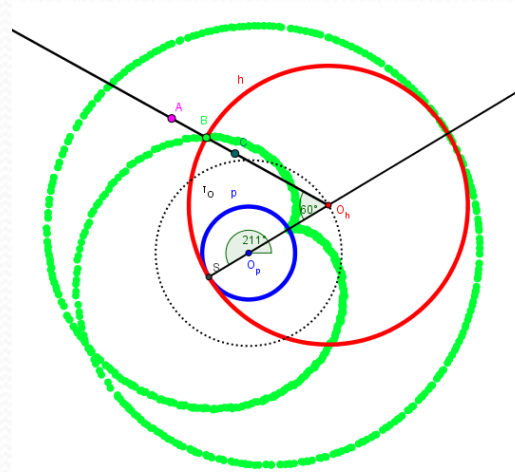
- **kardioida** – poloměry hybné a pevné kružnice jsou shodné



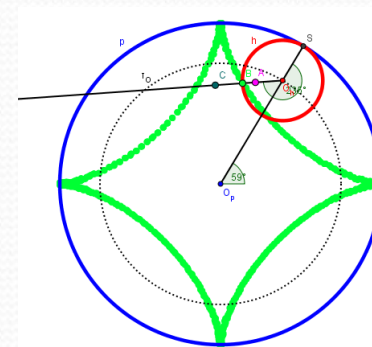
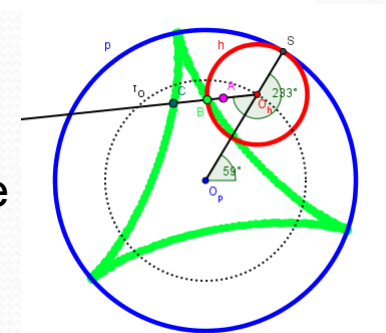
- **nefroida** – poloměr hybné kružnice je dvakrát větší než poloměr pevné kružnice



- **pericykloidy** – pevná kružnice leží uvnitř pohybující se kružnice

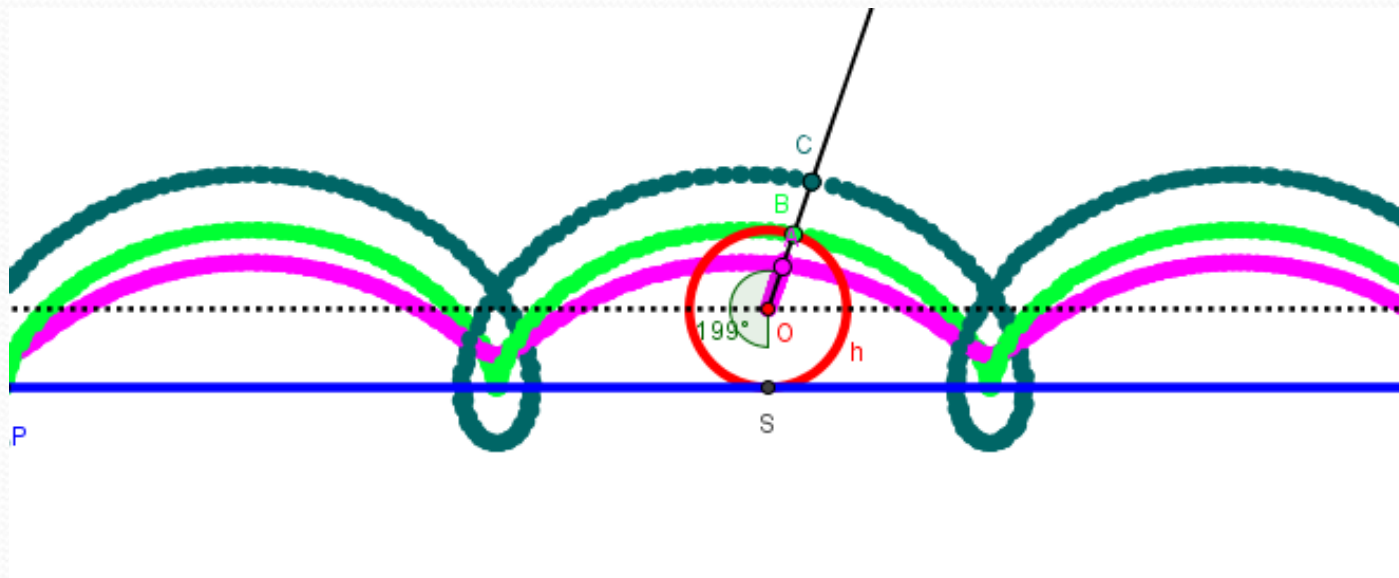


- **hypocykloidy** – hybná kružnice se pohybuje uvnitř pevné kružnice
 - **Steinerova hypocykloida** – hybná kružnice má třetinový poloměr oproti velikosti poloměru pevné kružnice
 - **asteroida** – hybná kružnice má čtvrtinový poloměr oproti velikosti poloměru pevné kružnice



b) Kružnice odvalující se po pevné přímce

- prostá cykloida
- zkrácená cykloida
- prodloužená cykloida



Vektorová funkce jedné reálné proměnné

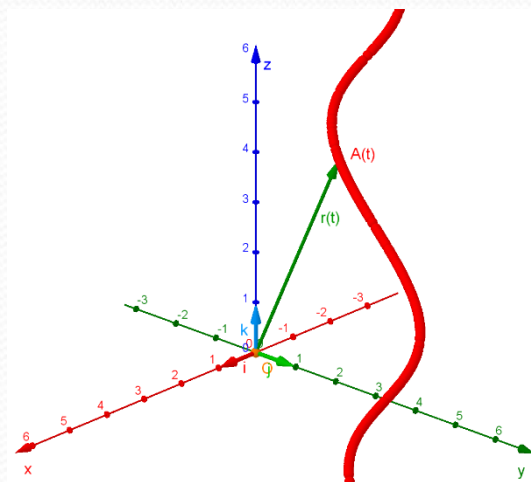
Pro naše účely budeme křivku definovat pomocí tzv. vektorové funkce jedné reálné proměnné. Díky tomuto způsobu lze totiž sledovat křivku a její vlastnosti početně.

Definice:

Zobrazení, které každému reálnému číslu t z intervalu I jednoznačně přiřazuje vektor

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I,$$

nazýváme **vektorovou funkcí jedné reálné proměnné**.



Poznámka: Místo zápisu $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, můžeme analogicky psát

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k}, t \in I.$$

Poznámka: Reálné funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ jsou **souřadnicemi** proměnného vektoru $\mathbf{r}(t)$. Interval I nazýváme **definičním oborem** daného zobrazení, tj. definičním oborem vektorové funkce jedné reálné proměnné.

Poznámka: Definice operací s vektorovými funkcemi, jako sčítání či odčítání vektorových funkcí, násobení vektorových funkcí reálným číslem, skalární či vektorové násobení vektorových funkcí jsou ekvivalentní s definicemi platnými pro konstantní vektory.

Limita, spojitost a derivace vektorové funkce jedné reálné proměnné

Jako v případě funkce jedné reálné proměnné můžeme i pro vektorovou funkci jedné reálné proměnné $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, definovat limitu, spojitost a derivaci v bodě t_0 pomocí jejích souřadnic.

Definice:

Vektor $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ nazveme **hodnotou** vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ v bodě t_0 .

Limita

Definice:

Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, se blíží ke konstantnímu vektoru $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ blíží-li se parametr t k bodu t_0 . Píšeme

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0,$$

kde souřadnice x_0, y_0, z_0 konstantního vektoru $\mathbf{r}_0$ jsou limitami reálných funkcí $x(t), y(t), z(t)$ pro hodnotu parametru t blížící se k bodu t_0 , např.

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), y_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), z_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t),$$

tj.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right).$$

Spojitosť

Definice:

Vektorová funkce $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, je **spojitá** v bodě t_0 , jsou-li v bodě t_0 spojitě všechny souřadnice, tj. všechny funkce $x(t), y(t), z(t)$.

Derivace

Definice:

Derivací vektorové funkce $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, nazýváme vektorovou funkci

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), t \in I$$

(pokud existuje).

Poznámka: Derivací vektorové funkce je vektor, jehož souřadnice jsou derivacemi souřadnic vektorové funkce.

Poznámka: Derivací vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ v bodě t_0 je

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Derivace vyšších řádů

Existují-li derivace vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ pro každé $t \in I$ (I je definičním oborem vektorové funkce), potom derivace $\mathbf{r}'(t)$, $t \in I$, je také vektorová funkce. Derivace vektorové funkce $\mathbf{r}'(t)$ (pokud existuje) se nazývá druhá derivace vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ a značíme ji $\mathbf{r}''(t)$.

Poznámka: Postupným derivováním získáme derivace vyšších řádů, tj. $\mathbf{r}'''(t)$, $\mathbf{r}^{(IV)}(t)$,

Pravidla pro počítání derivací vektorové funkce jedné reálné proměnné

Vzhledem ke skutečnosti, že souřadnice vektorové funkce jedné reálné proměnné jsou reálné funkce jedné proměnné, mohou být všechna pravidla platná pro počítání limit a derivací reálné funkce jedné proměnné aplikována při počítání s vektorovou funkcí jedné reálné proměnné (resp. při počítání s jejími souřadnicemi).

Uvedme pouze nejdůležitější pravidla. Necht' $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{s}(t)$ jsou vektorové funkce a necht' $f(t)$ je reálná funkce, kde $t \in I$, potom

a) $(\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t))' = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{s}'(t),$

b) $(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t))' = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}'(t),$

c) $(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t))' = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}'(t),$

d) $(f(t) \cdot \mathbf{r}(t))' = f'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + f(t) \cdot \mathbf{r}'(t),$

kde „ $\cdot$ “ označuje skalární a „ $\times$ “ označuje vektorový součin.

Derivace složené vektorové funkce

Má-li funkce $u = \varphi(t)$ derivaci v bodě $t = t_0$ a má-li vektorová funkce $\mathbf{r}(u)$ derivaci v bodě $u_0 = \varphi(t_0)$, potom derivace složené funkce $\mathbf{r}(\varphi(t))$ existuje v bodě t_0 a platí

$$\frac{d \mathbf{r}(\varphi(t_0))}{dt} = \frac{d \mathbf{r}(u_0)}{du} \cdot \frac{d u(t_0)}{dt}.$$

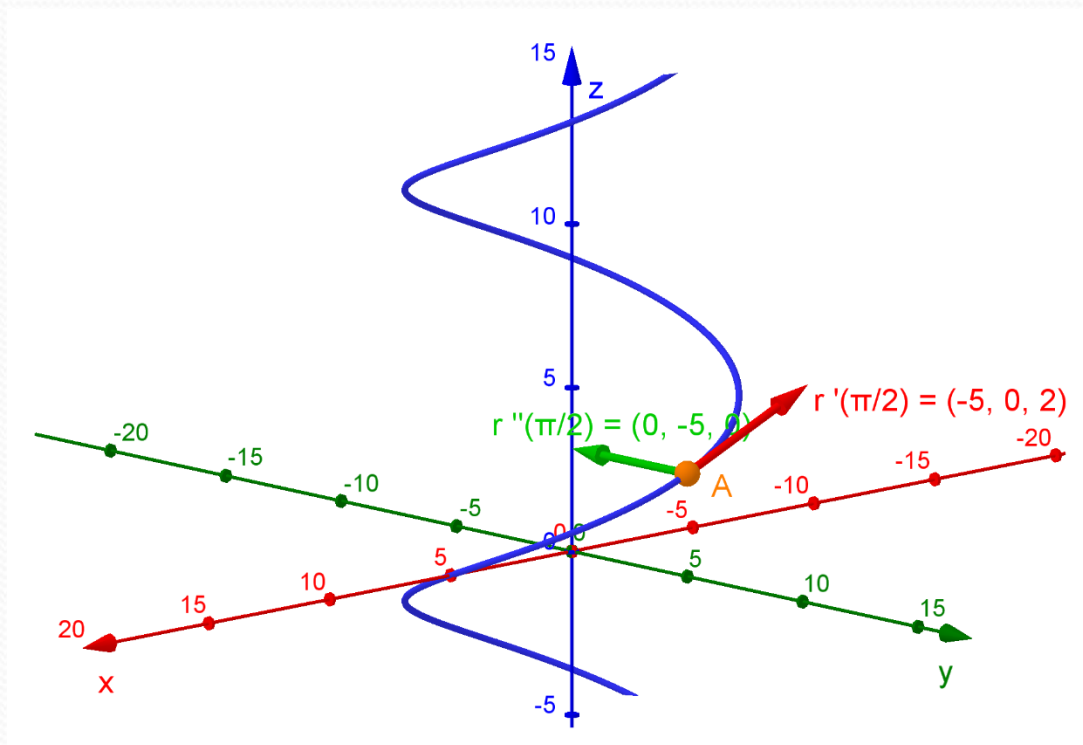
Příklad 3.1:

Určete první a druhou derivaci vektorové funkce $\mathbf{r}(t) = (5 \cdot \cos t, 5 \cdot \sin t, 2t)$, $t \in (0, 2\pi)$, v bodě $t_0 = \pi/2$.

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cdot \cos t, 5 \cdot \sin t, 2t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-5 \cdot \sin t, 5 \cdot \cos t, 2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-5, 0, 2)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-5 \cdot \cos t, -5 \cdot \sin t, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -5, 0)$$

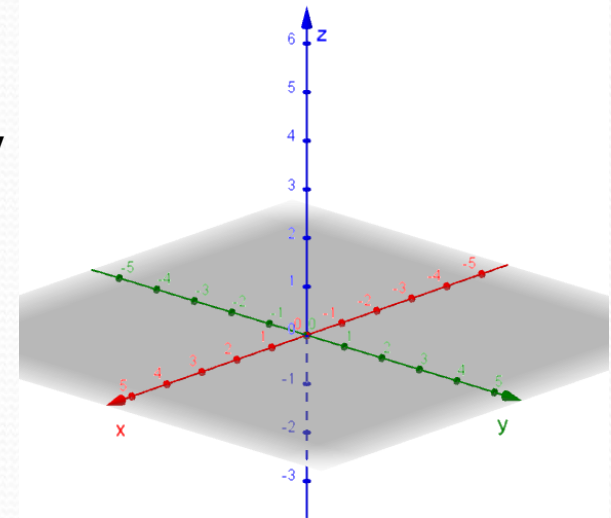


Parametrizace křivek pomocí různých typů souřadnic

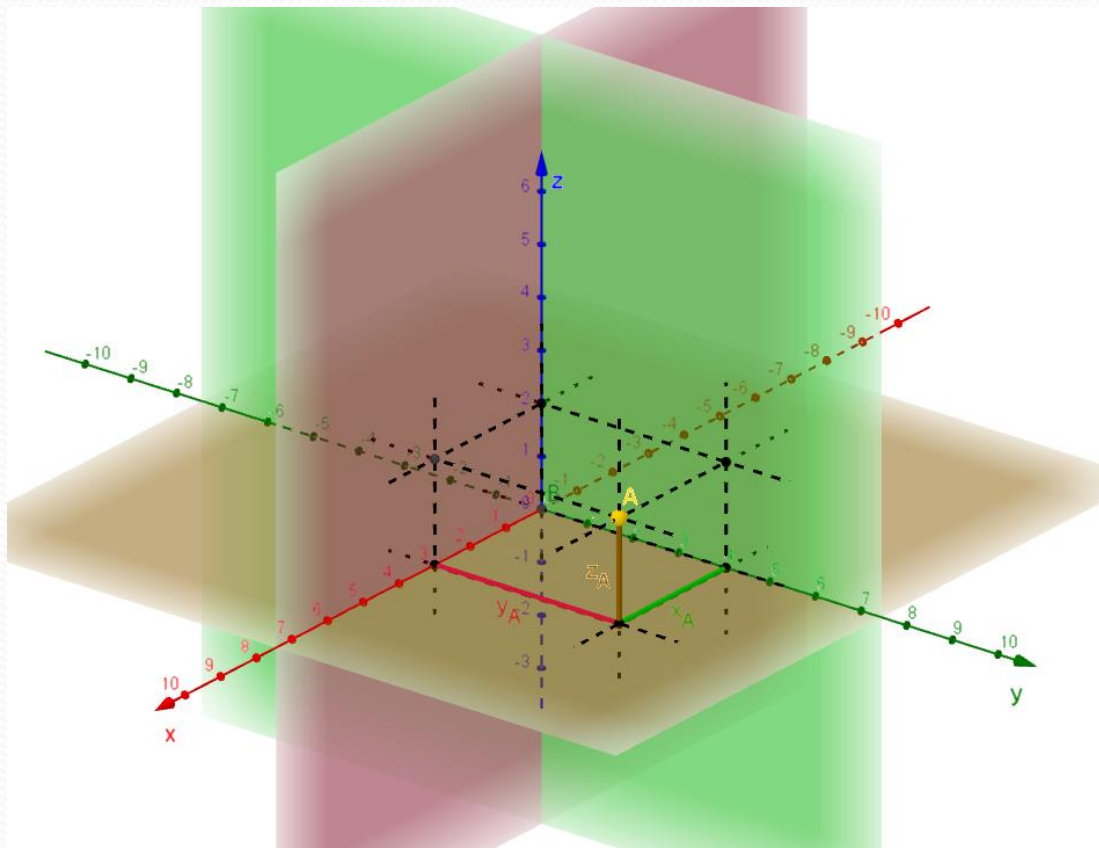
1. Kartézská soustava souřadnic

Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme takovou soustavu souřadnic, v níž jsou **souřadnicové osy** (obvykle označované x , y , resp. z) navzájem kolmé přímky se společným průsečíkem, který nazýváme **počátek soustavy souřadnic**.

- Na souřadnicových osách zpravidla volíme shodné jednotky, v takovém případě nazýváme soustavu souřadnic **ortonormální souřadnicovou soustavou**.
- Jsou-li souřadnicové osy navzájem kolmé přímky a jsou-li alespoň na dvou z nich zvoleny různé jednotky, pak jimi určenou soustavu souřadnic nazýváme **ortogonální soustavou souřadnic**.
- Dvojice souřadnicových os tvoří souřadnicové roviny, tj. roviny (xy) , resp. (yz) a (xz) .

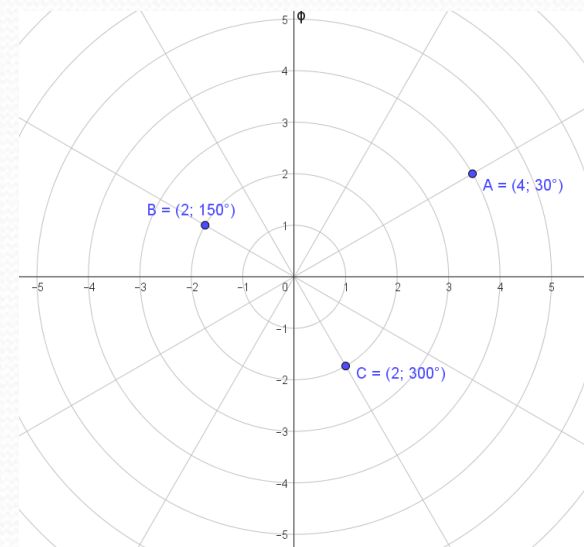


Souřadnice x_A , y_A , z_A bodu A jsou vzdálenostmi bodu A po řadě od souřadnicových rovin (yz) , (xz) a (xy) .



2. Polární soustava souřadnic

Polární soustavou souřadnic rozumíme takovou soustavu souřadnic v rovině, v níž jedna souřadnice (obvykle značíme r) udává vzdálenost bodu A roviny od počátku soustavy souřadnic a druhá souřadnice (běžně značíme φ) představuje úhel, který svírá průvodič bodu A s kladným směrem osy x . Tj. souřadnice bodu A zapisujeme ve tvaru $A [r; \varphi]$.



Využití polární soustavy souřadnic:

- u pohybů, při nichž se
 - nemění vzdálenost bodů od počátku soustavy souřadnic (např. pohyb po kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic)
 - mění vzdálenost bodů od počátku soustavy souřadnic s jednoduchou závislostí (např. pohyb po spirálách – Archimédova spirála, logaritmická spirála)

Transformace polárních souřadnic na kartézské (v E_2):

Polární souřadnice lze transformovat na kartézské souřadnice pomocí rovnic

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi,$$

kde $r \in \mathbf{R}_0^+$ a $\varphi \in \langle 0^\circ, k \cdot 360^\circ \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

Naopak je též možné transformovat kartézské souřadnice na souřadnice polární, a to pomocí rovnic

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ pro } \varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Poznámka: Pro další intervaly je nutné změnit znaménko funkce $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Příklad 1:

Určete polární souřadnice bodů A , B a C s danými kartézskými souřadnicemi $A [3, 0]$, $B [4, 4]$, $C [-6, 0]$.

Řešení: $A [3, 0^\circ]$, $B [4\sqrt{2}, 45^\circ]$, $C [6, 180^\circ]$.

Příklad 2:

Jaké jsou pravoúhlé souřadnice bodů D , E a F s danými polárními souřadnicemi $D [5, 30^\circ]$, $E [6, 90^\circ]$ a $F [8, 225^\circ]$

Řešení: $A [\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}]$, $B [0, 6]$, $C [-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}]$.

Parametrické a vektorové rovnice křivky v E_3

Představa křivky k jakožto kinematically vytvořené množiny bodů A v prostoru E_3 vede k tomu, že každému bodu $A(t)$ křivky lze přiřadit vektor $\mathbf{r}(t) = A(t) - O$ (tzv. průvodič bodu). Průvodič $\mathbf{r}(t)$ je vektor, který je svým počátečním bodem umístěn do počátku O soustavy souřadnic a svým koncovým bodem je umístěn v bodě $A(t)$ křivky. Z toho plyne, že průvodič $\mathbf{r}(t)$ má stejné souřadnice jako bod $A(t)$ křivky.

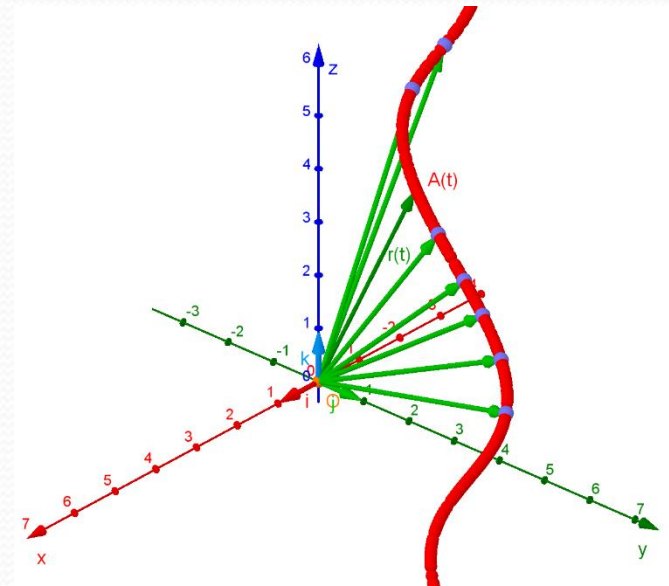
Lze shrnout, že funkce $\mathbf{r}(t)$ je vektorovou funkcí popisující křivku k , tj. platí, že

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) \rightarrow A(t), t \in I.$$

Uvědomíme-li si, že křivka k je vytvořena koncovými body proměnného vektoru $\mathbf{r}(t)$, můžeme křivku definovat následovně.

Definice:

Křivkou k nazveme množinu bodů $A(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, jejichž průvodiče jsou určeny vektorovou funkcí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definovanou na intervalu I .



Poznámka: Rovnici $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ nazýváme **vektorovou rovnicí** křivky k . Jejím rozepsáním na tvar

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ k: y &= y(t), t \in I, \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

získáváme **parametrické rovnice** křivky k .

Číslo $t \in I$ se nazývá **parametr bodu** $A(t)$ křivky k . O funkcích $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ předpokládáme, že jsou spojité v intervalu I a že mají derivace alespoň prvního řádu.

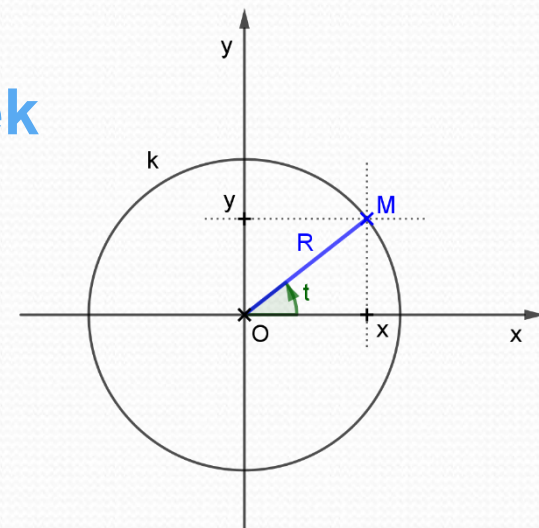
Parametrizace některých rovinných křivek

Kružnice

Kružnice v rovině $z = 0$ se středem v počátku souřadnicového systému a s poloměrem R je určena parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}k: x &= R \cdot \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ y &= R \cdot \sin t \\ z &= 0\end{aligned}$$

a tedy vektorovou funkcí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (R \cdot \cos t, R \cdot \sin t, 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Parametr t představuje odchylku jednotkového vektoru $\mathbf{i}$ na ose x a vektoru $\mathbf{OM}$ pro bod M na kružnici k .



Graf explicitně zadané funkce

Graf explicitně zadané funkce $y = f(x)$, $x \in D(f)$, lze parametrizovat takovým způsobem, že za parametr bodu na této křivce zvolíme jeho x -ovou souřadnici. Parametrické rovnice křivky k jsou pak tvaru

$$k: x = t, \quad t \in D(f),$$

$$y = f(t)$$

$$z = 0$$

a křivka k je určena vektorovou funkcí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, f(t), 0)$, $t \in D(f)$.

Lze shrnout, že geometrický význam parametru může být různý. Např. u kružnice byl parametr t odchylkou dvou vektorů a u grafu explicitně zadané funkce x -ovou souřadnicí bodu křivky. Dále lze konstatovat, že vektorová rovnice křivky závisí na parametrizaci křivky, ale i na volbě soustavy souřadnic. Na druhou stranu křivka sama, ani její tvar nezávisí ani na způsobu parametrizace a ani na volbě soustavy souřadnic.

Příklad 3.2:

Užitím vektorové funkce запиšte následující křivky:

a) přímku a : $x = -5 + 6t, \quad t \in \mathbf{R}$
 $y = 1 + 3t$
 $z = 4 - 7t$

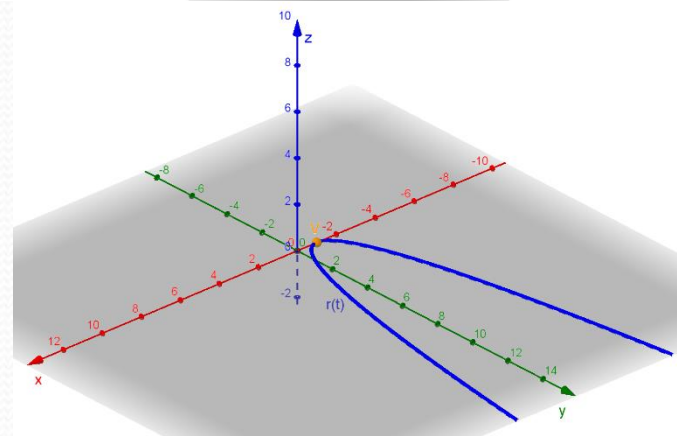
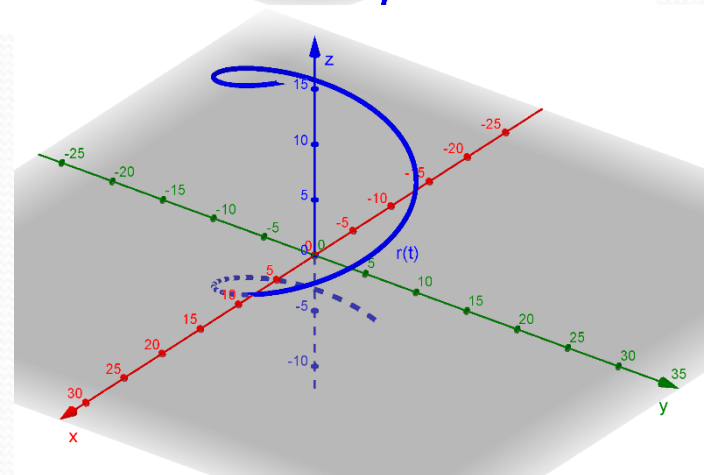
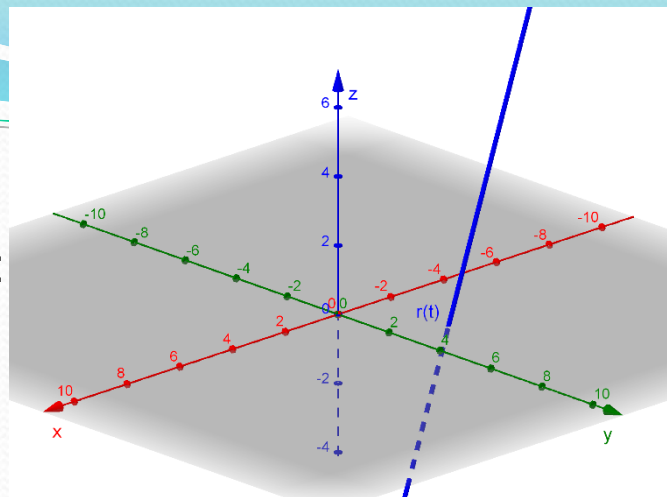
$$\mathbf{r}(t) = (-5 + 6t, 1 + 3t, 4 - 7t), t \in \mathbf{R}$$

b) šroubovici s : $x = 8 \cdot \cos t, \quad t \in \langle 0, 4\pi \rangle$
 $y = 8 \cdot \sin t$
 $z = 3t$

$$\mathbf{r}(t) = (8 \cdot \cos t, 8 \cdot \sin t, 3t), t \in \langle 0, 4\pi \rangle$$

c) parabolu p : $y = x^2 + 2x + 1$

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2 + 2t + 1, 0), t \in \mathbf{R}$$

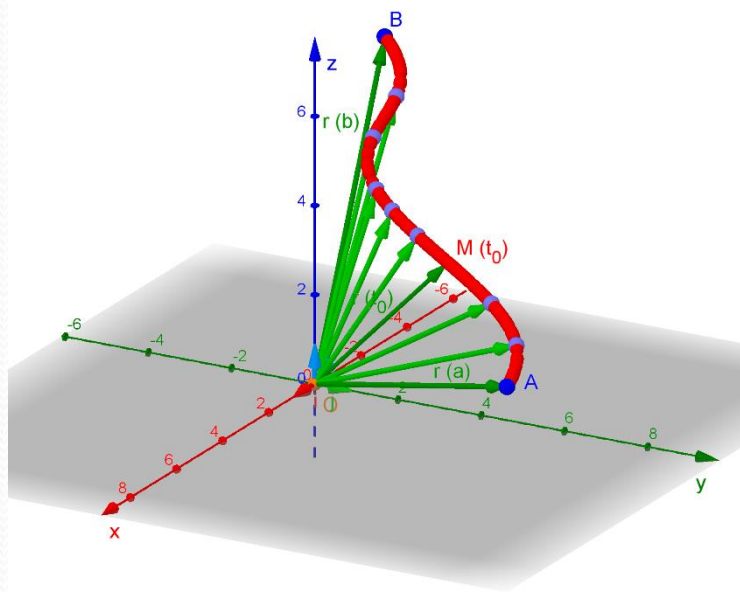


- 
- Vektorová rovnice křivky závisí
 - na parametrizaci křivky,
 - na volbě soustavy souřadnic.
 - Naopak křivka, ani její tvar nezávisí na způsobu parametrizace, ani na volbě soustavy souřadnic.

Klasifikace křivek

Předpokládejme, že křivka k prochází bodem M , pak existuje hodnota t_0 parametru t tak, že platí $\mathbf{r}(t_0) = M$.

Nechť $I \in \langle a, b \rangle$, potom bod $\mathbf{r}(a) = A$ nazýváme **počátečním bodem** křivky k a bod $\mathbf{r}(b) = B$ jejím **koncovým bodem**. Říkáme, že křivka k spojuje bod A s bodem B a že body A a B jsou její koncové body.



Rozdělení křivek

Otevřené × uzavřené křivky

Otevřené křivky (nebo též oblouky) jsou takové křivky, které mají koncové body. Na druhou stranu **uzavřené křivky** nemají žádné koncové body. Např. uzavřená křivka je transformací uzavřeného intervalu $I \in \langle a, b \rangle$, v němž obrazy koncových bodů splývají.

Rovinné × prostorové křivky

Křivka, jejíž všechny body leží v rovině, se nazývá **rovinná křivka**. V opačném případě hovoříme o **křivce prostorové**.

Jednoduchá křivka

Křivku nazýváme **jednoduchou**, jestliže pro všechny parametry $t_1, t_2 \in I$, kde $t_1 \neq t_2$, platí, že $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$. Tzn., že jednoduchá křivka neprotíná sama sebe.

Hladká křivka

Křivku k danou vektorovou funkcí $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$, nazýváme **hladkou křivkou** na intervalu I , jestliže první derivace $\mathbf{r}'(t)$ vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ je spojitá na intervalu I .

Klasifikace bodů křivek

Nechť hladká křivka k je určena vektorovou funkcí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in I$, pak její body, pro které platí, že $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ nazýváme **regulární body**.

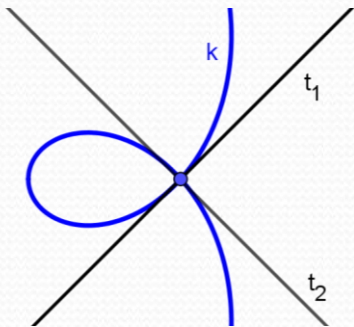
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0} \quad \text{singulární}$$

Body hladké křivky k , ve kterých jsou definovány první a druhé derivace její vektorové funkce (různé od nuly) a pro které platí $\mathbf{r}''(t) = c \cdot \mathbf{r}'(t)$, $c \in \mathbf{R}$,
 $\mathbf{r}''(t) \neq c \cdot \mathbf{r}'(t)$,

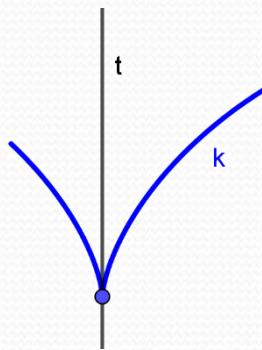
nazveme **inflexní body**.

neinflexní

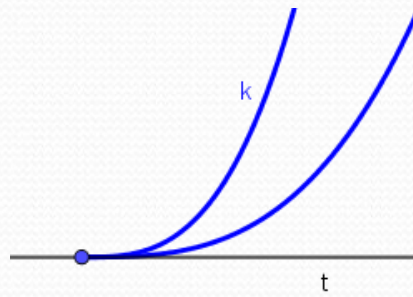
Speciální body křivek



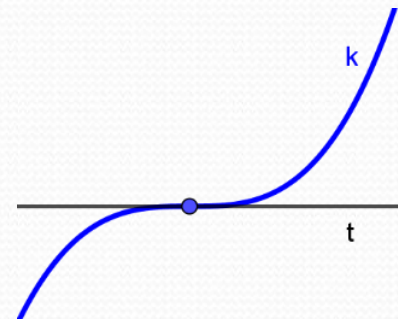
uzlový bod



bod vratu 1. druhu



bod vratu 2. druhu



inflexní bod

Příklad 3.3:

Určete singulární body křivky (cykloidy) dané její vektorovou rovnicí
 $\mathbf{r}(t) = (2t - 2 \cdot \sin t, 2 - 2 \cdot \cos t, 0), t \in \mathbf{R}.$

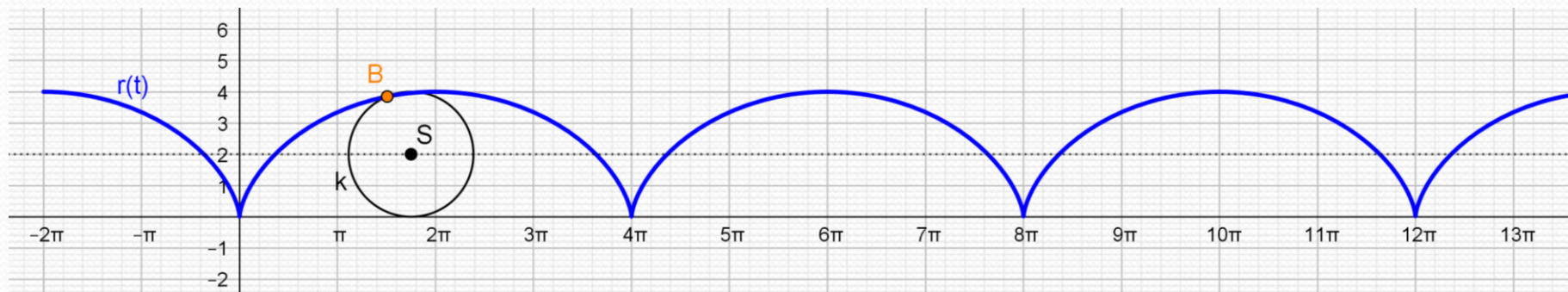
$$\mathbf{r}(t) = (2t - 2 \cdot \sin t, 2 - 2 \cdot \cos t, 0)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (2 - 2 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 - 2 \cdot \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \\ 2 \cdot \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{t = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}}$$

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{llll}
 k = 0 & \dots & t = 0 & \dots & \underline{\underline{S_1 [0, 0, 0]}} \\
 k = 1 & \dots & t = 2\pi & \dots & \underline{\underline{S_2 [4\pi, 0, 0]}} \\
 k = 2 & \dots & t = 4\pi & \dots & \underline{\underline{S_3 [8\pi, 0, 0]}} \\
 k = 3 & \dots & t = 6\pi & \dots & \underline{\underline{S_4 [12\pi, 0, 0]}} \\
 \vdots & & & &
 \end{array}$$



Příklad 3.4:

Křivka je dána svou vektorovou rovnicí $\mathbf{r}(t) = (t^5, t^4 - t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$.

- Dokažte, že všechny její body jsou regulární.
- Rozhodněte, zda jsou body $M(0)$, $N(1)$ inflexní.

$$\mathbf{r}(t) = (t^5, t^4 - t, 0), \quad t \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (5t^4, 4t^3 - 1, 0) \neq (0, 0, 0)$$

$$5t^4 \neq 0 \quad \wedge \quad 4t^3 - 1 \neq 0$$

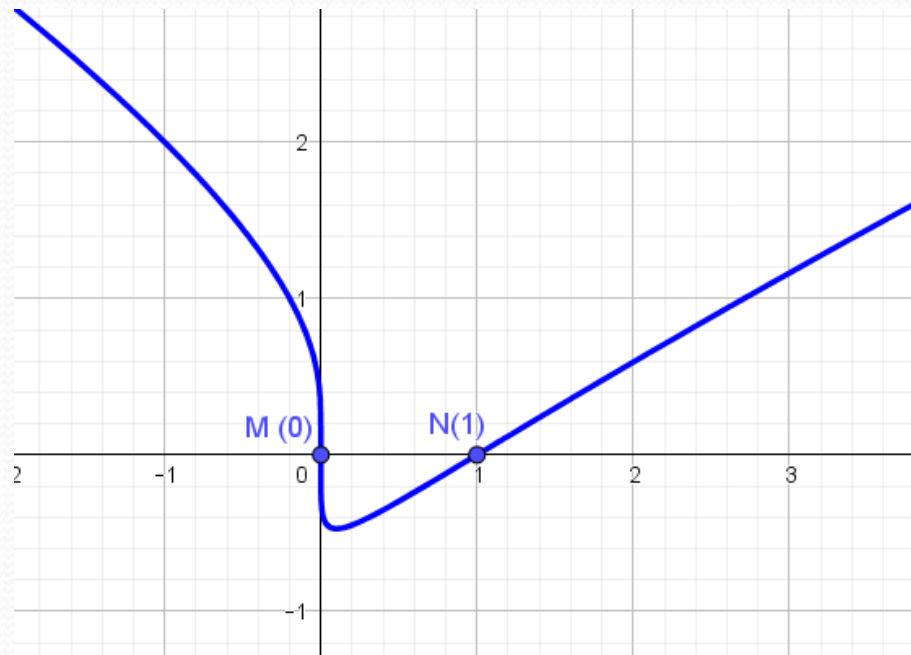
$$t \neq 0 \quad \wedge \quad t \neq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K = \{ \}}}$$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^5, t^4 - t, 0), \quad t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{r}'(t) = (5t^4, 4t^3 - 1, 0)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (20t^3, 12t^2, 0)$$



$$\left. \begin{array}{l} M(0): \mathbf{r}'(0) = (0, -1, 0) \\ \mathbf{r}''(0) = (0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r}''(0) = 0 \cdot \mathbf{r}'(0) \Rightarrow M(0)$$

M je inflexní bod

$$\left. \begin{array}{l} N(1): \mathbf{r}'(1) = (5, 3, 0) \\ \mathbf{r}''(1) = (20, 12, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r}''(1) = 4 \cdot \mathbf{r}'(1) \Rightarrow N(1)$$

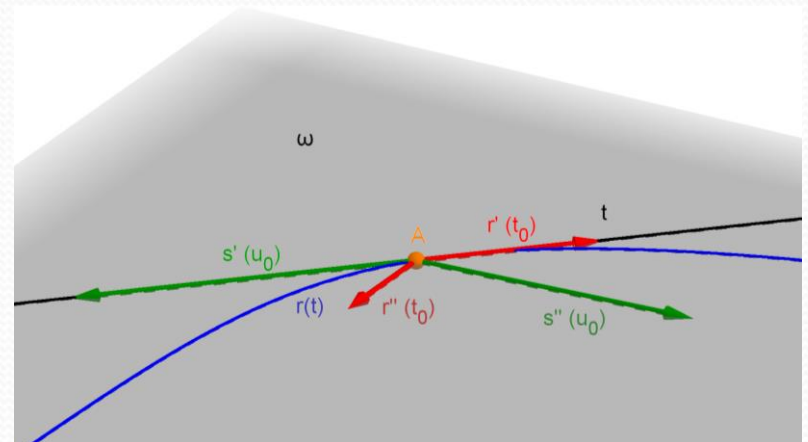
N je inflexní bod

Geometrický význam 1. a 2. derivace vektorové funkce pro parametrizaci křivky

Výše jsme zmínili geometrický význam 1. a 2. derivace vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ pro klasifikaci bodů křivky, nyní ještě uvedeme geometrický význam 1. a 2. derivace vektorové funkce $\mathbf{r}(t)$ pro parametrizaci křivky.

Geometrický význam parametru může být různý. Jednu a tutéž křivku lze určit různými vektorovými funkcemi, např. vektorovou funkcí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in I$, anebo také vektorovou funkcí $\mathbf{s} = \mathbf{s}(u)$, $u \in J$. Potom bod M křivky k má v daných parametrizacích parametry t_0 , u_0 a platí:

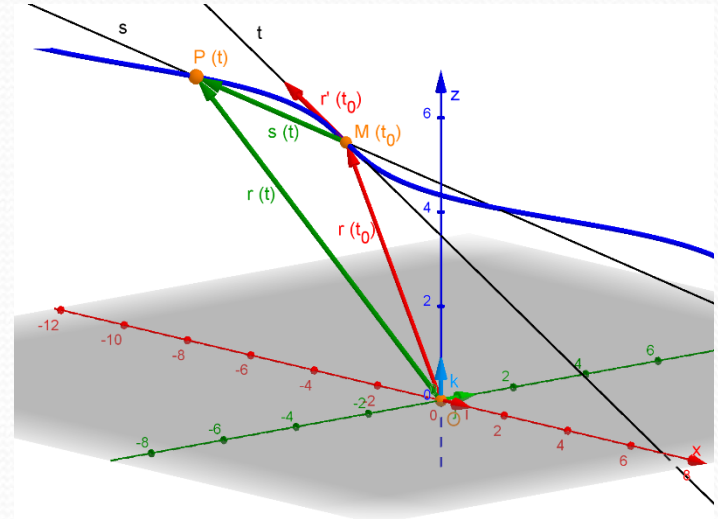
1. je-li bod M v obou parametrizacích regulárním bodem, pak vektory $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{s}'(u_0)$ jsou rovnoběžné a existuje jediná přímka, která prochází bodem M a je s těmito vektory rovnoběžná;
2. je-li bod M v obou parametrizacích regulárním neinflexním bodem, pak vektory $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}''(t_0)$, $\mathbf{s}'(u_0)$, $\mathbf{s}''(u_0)$ jsou komplanární. Tj. existuje jediná rovina, která prochází bodem M a je s těmito vektory rovnoběžná.



Tečna křivky v regulárním bodě

Definice:

Nechť je křivka k dána vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, a nechť bod $M(t_0)$ je regulárním bodem křivky k , tj. platí pro něj $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Tečnu v bodě $M(t_0)$ křivky k definujeme jako limitní polohu sečny MP , kde P je bodem křivky k pro hodnotu parametru t .



Sečna MP křivky k je určena body $M(t_0)$ a $P(t)$ ležícími na křivce k a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$, a tedy i s každým nenulovým násobkem vektoru $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$. Tj. i s vektorem

$$\mathbf{s}(t) = \frac{1}{t - t_0} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Vektor $\mathbf{s}(t)$ je hodnotou vektorové funkce, jejíž limitou pro $t \rightarrow t_0$ je vektor $\mathbf{r}'(t_0)$. Platí tedy, že

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{s}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) = \\ &= (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Tečnou t křivky k v jejím regulárním bodě $M(t_0)$ je tedy přímka rovnoběžná s vektorem $\mathbf{r}'(t_0)$.

Definice:

V regulárním bodě $M(t_0)$ křivky k dané vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, existuje právě jedna tečna této křivky. Vektor $\mathbf{t} = \mathbf{r}'(t_0)$ je směrovým vektorem této tečny a nazýváme jej **tečným vektorem** křivky k .

Poznámka: Regulární bod $M(t_0)$ je bodem dotyku tečny s křivkou k .

Definice:

Každá přímka vedená regulárním bodem $M(t_0)$ křivky k kolmo k tečně se nazývá **normála**.

Definice:

Všechny normály v bodě $M(t_0)$ křivky k tvoří svazek přímek v tzv. **normálové rovině**, tj. v rovině, která prochází bodem $M(t_0)$ křivky kolmo k tečně t .

Příklad 3.5:

Napište parametrické rovnice tečny p v bodě $t_0 = 1$ ke křivce k , která je dána vektorovou rovnicí $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^4)$, $t \in \mathbf{R}$.

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^4) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(1) = (1, 1, 1)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (2t, 1, 4t^3) \Rightarrow \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'(1) = (2, 1, 4)$$

$$p: x = 1 + 2s, \quad s \in \mathbf{R}$$

$$y = 1 + s$$

$$z = 1 + 4s$$

