

Průvodní trojhran křivky

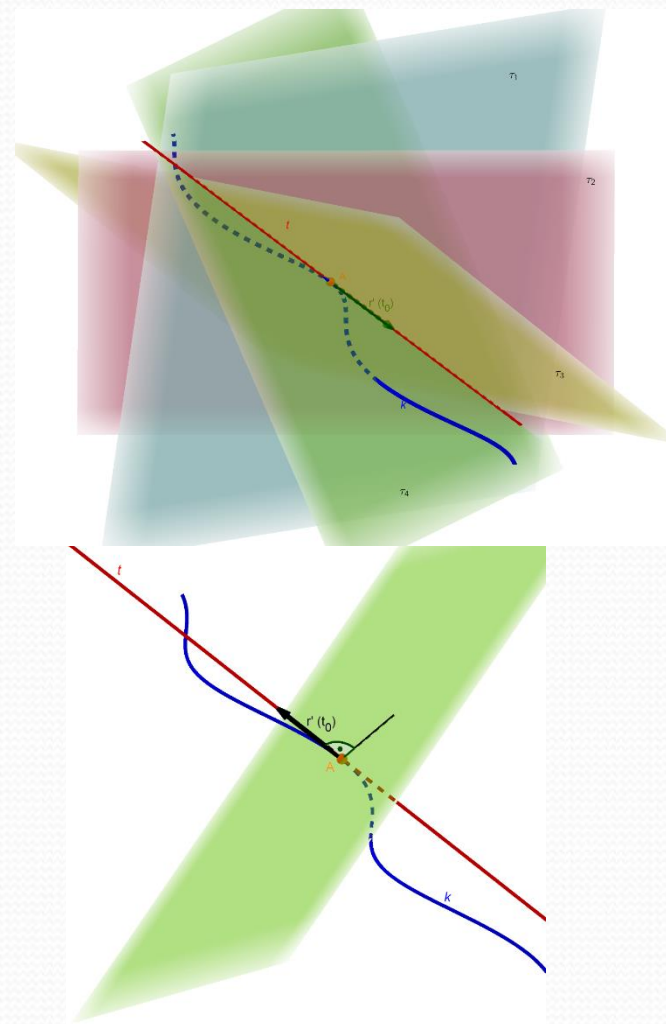
Zavedení prvků průvodního trojhranu křivky

Tečná rovina (symbol τ)

Tečná rovina τ křivky k v jejím regulárním neinflexním bodě A je jakákoliv rovina, ve které leží tečna t křivky k sestrojená v bodě A . Odtud plyne existence množiny nekonečně mnoha tečných rovin křivky k v jejím regulárním neinflexním bodě A .

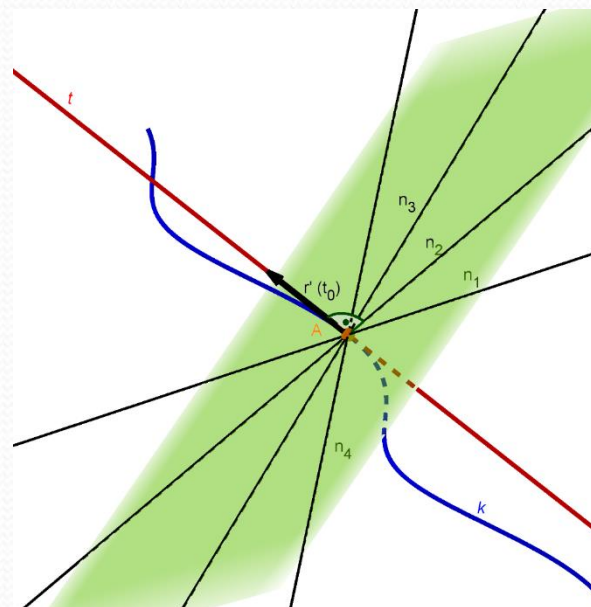
Normálová rovina (symbol ν)

Normálová rovina ν křivky k v jejím regulárním neinflexním bodě A je rovina procházející tímto bodem kolmo k tečně t sestrojené v tomto bodě.



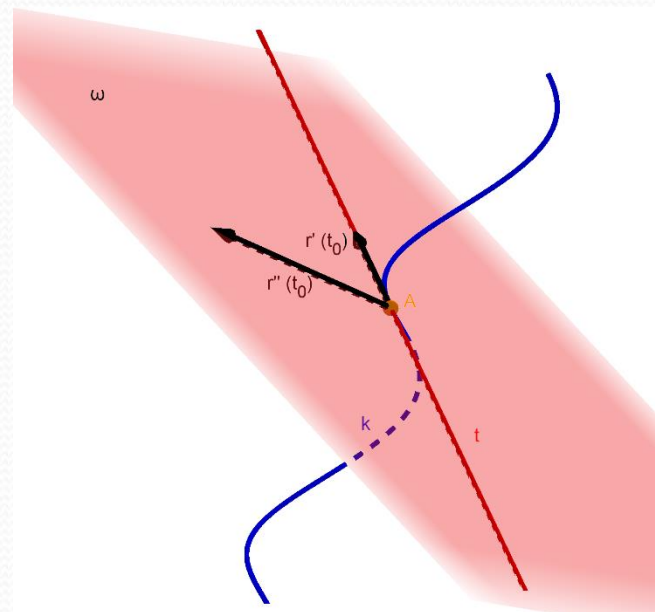
Normála (symbol n)

Normála n křivky k v jejím regulárním neinflexním bodě A je jakákoliv přímka procházející tímto bodem kolmo k tečně t sestrojené v tomto bodě. Lze shrnout, že existuje svazek takovýchto přímek. Přitom všechny normály leží v normálové rovině ν křivky k sestrojené v bodě A .



Oskulační rovina (symbol ω)

Rovina ω , která prochází regulárním neinflexním bodem $A(t_0)$ křivky k a která je rovnoběžná s vektory $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}''(t_0)$, se nazývá **oskulační rovina** křivky k v bodě $A(t_0)$.



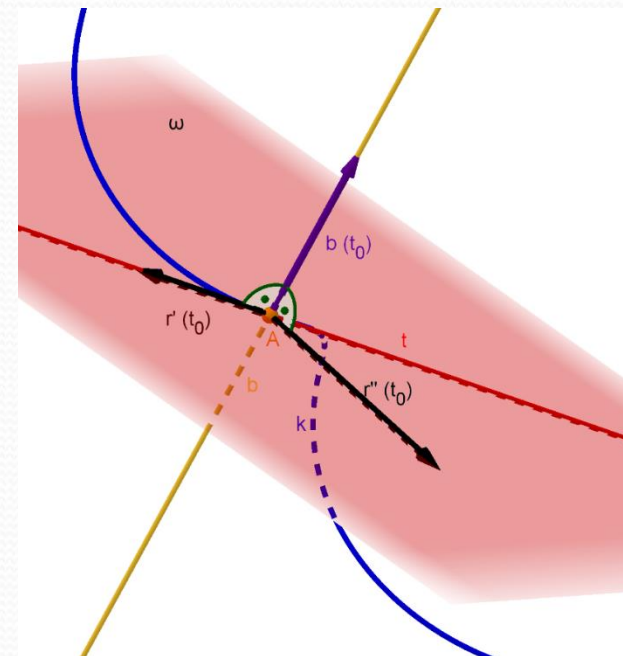
Binormála (symbol b)

Binormála b je přímka procházející regulárním neinflexním bodem A křivky k kolmo oskulační rovině křivky k v bodě A .

Binormála je kolmá k tečně t v bodě A křivky k . Je to jedna přímka ze svazku normál. Směrový vektor $\mathbf{b}$ binormály lze určit vektorovým součinem dvou nekolineárních vektorů ležících v oskulační rovině křivky k v bodě A .

Je-li bod A neinflexním bodem křivky k , pak ony dva vektory jsou vektory $\mathbf{r}'(t_0)$, $\mathbf{r}''(t_0)$ první a druhé derivace vektorové funkce popisující danou křivku k . Potom můžeme psát

$$\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0).$$



Hlavní normála (symbol n)

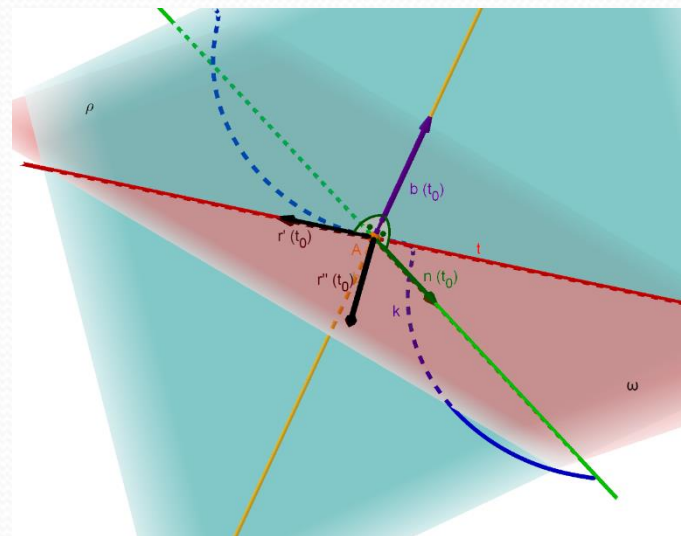
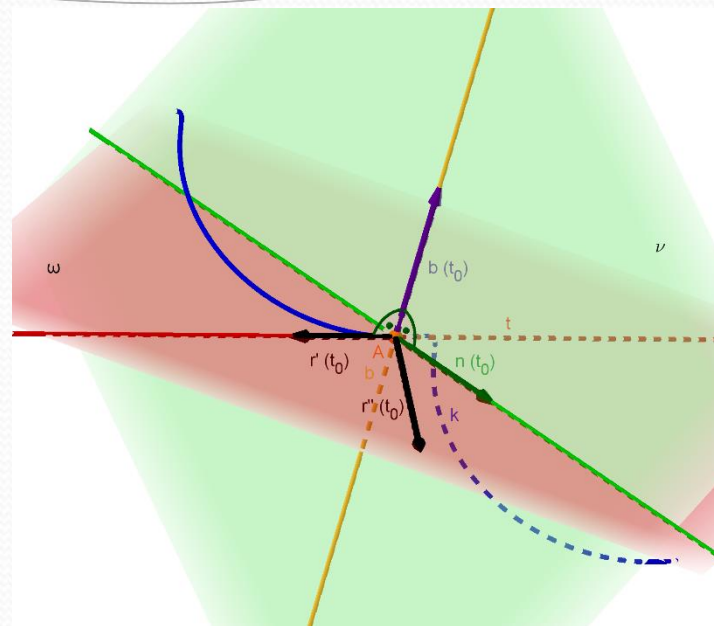
Hlavní normálou křivky k v jejím regulárním neinflexním bodě A nazýváme normálu ležící v oskulační rovině křivky k . Hlavní normála n musí být v bodě A křivky k kolmá k tečně t a k binormále b . Směrový vektor hlavní normály je definovaný jako vektorový součin

$$\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{t}(t_0) \times \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{b}(t_0).$$

Rektifikační rovina (symbol ρ)

Rektifikační rovina ρ v regulárním neinflexním bodě A křivky k je rovina procházející tímto bodem kolmo k hlavní normále v bodě A .

Tečna t a binormála b sestrojené v daném bodě A křivky k leží v rektifikační rovině ρ procházející bodem A .



Lze shrnout, že v regulárním neinflexním bodě A křivky k je definována trojice navzájem kolmých přímek:

t ... tečna,

b ... binormála,

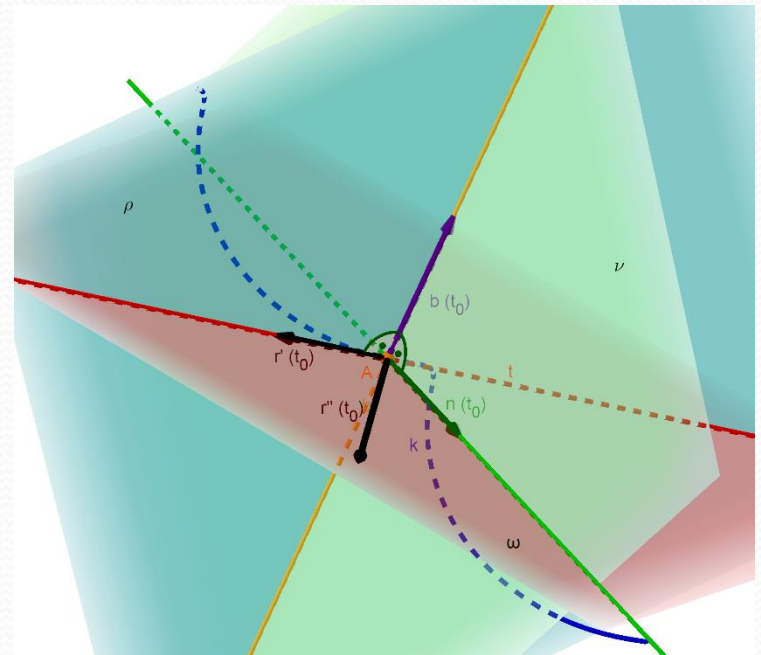
n ... hlavní normála,

přítom pro jejich směrové vektory platí

$$\mathbf{t}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0),$$

$$\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0),$$

$$\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{t}(t_0) \times \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{b}(t_0).$$



Dále je v regulárním neinflexním bodě A křivky k definována trojice navzájem kolmých rovin:

$\omega = (t, n)$. . . oskulační rovina,

$\nu = (b, n)$. . . normálová rovina,

$\rho = (t, b)$. . . rektifikační rovina.

Uvedenými trojicemi navzájem kolmých rovin a navzájem kolmých přímk je jednoznačně definován pravoúhlý trojhran s vrcholem v bodě A , tzv. **průvodní trojhran křivky**. Jeho hrany jsou rovnoběžné s vektory $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ a jsou to polopřímky na tečně, binormále a na hlavní normále s počátečním bodem v bodě A . Stěny průvodního trojhranu leží ve třech uvedených rovinách, tj. v rovině rektifikační, oskulační a normálové.

Vlastnosti rovinných křivek

Poznámka: Oskulační rovina rovinné křivky k splývá s rovinou, ve které daná křivka leží.

Poznámka: Všechny oskulační roviny leží v rovině křivky.

Poznámka: Všechny tečny leží v rovině křivky.

Příklad 3.6:

Určete prvky průvodního trojhranu (parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny) křivky $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$, $t \in \mathbf{R}$, v bodě $t_0 = \pi/2$.

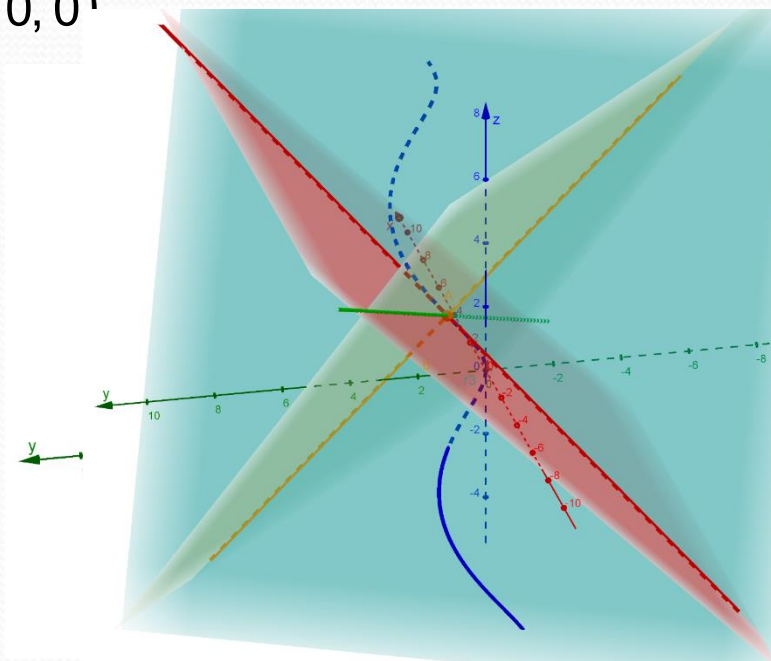
$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, \frac{\pi}{2}\right) = A$$

$$\mathbf{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 1, 1) = \mathbf{t}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (\sin t, \cos t, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

$$\mathbf{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$



$$t : x = \frac{\pi}{2} - 1 + u, \quad u \in \mathbf{R}$$

$$y = 1 + u$$

$$z = \frac{\pi}{2} + u$$

$$\text{normálová rovina: } \mathbf{n}^V = \mathbf{t} \left(\frac{\pi}{2} \right) = (1, 1, 1)$$

$$v : 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1 \right) + 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$v : x + y + z - \pi = 0$$

$$b : x = \frac{\pi}{2} - 1, \quad v \in \mathbf{R}$$

$$y = 1 + v$$

$$z = \frac{\pi}{2} - v$$

$$\text{oskulační rovina: } \mathbf{n}^\omega = \mathbf{b} \left(\frac{\pi}{2} \right) = (0, 1, -1)$$

$$\omega : 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1 \right) + 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\omega : y - z + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

$$n : x = \frac{\pi}{2} - 1 + 2w, \quad w \in \mathbf{R}$$

$$y = 1 - w$$

$$z = \frac{\pi}{2} - w$$

$$\text{rektifikační rovina: } \mathbf{n}^\rho = \mathbf{n} \left(\frac{\pi}{2} \right) = (2, -1, -1)$$

$$\rho : 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1 \right) - 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\rho : 2x - y - z - \frac{\pi}{2} + 3 = 0$$

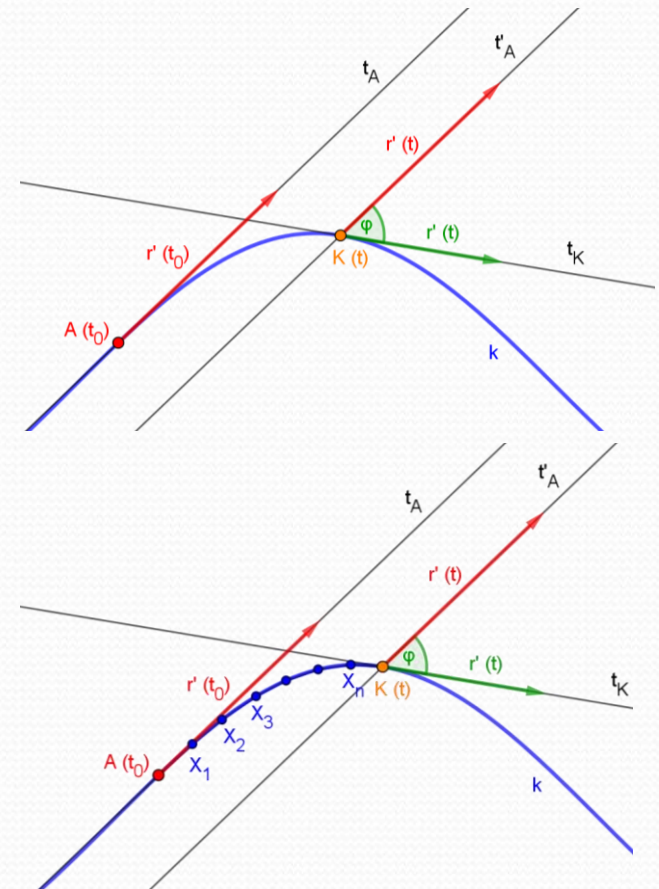
Křivost křivky

V okolí regulárního bodu $A(t_0)$ křivky k je možné určovat odchylky φ tečny t v bodě $A(t_0)$ od tečen v bodech $K(t)$ ležících ve „velmi blízkém“ okolí bodu $A(t_0)$. Je-li tedy φ odchylka tečen křivky k v jejích regulárních bodech $A(t_0)$, $K(t)$, pak za míru křivosti na oblouku AK považujeme podíl

$$\frac{\varphi}{s(AK)},$$

kde $s(AK)$ je délka oblouku AK na křivce k . Délkou oblouku AK přitom rozumíme integrální součet velikostí stran vepsané lomené čáry $A X_1 X_2 \dots X_n K$. To vede k výpočtu délky $s(AK)$ oblouku AK , tj. platí, že

$$s(AK) = s(KA) = \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt \right| = \left| \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \right|.$$



Definice:

Křivostí křivky k v jejím regulárním bodě $A(t_0)$ nazýváme reálné číslo

$$k(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi}{s(AK)}.$$

Pro $k(t_0) \neq 0$ nazveme číslo $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ **poloměrem křivosti** bodě $A(t_0)$.

Je-li křivka k určena vektorovou rovnicí $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, pak pro výpočet její křivosti $k(t_0)$ v bodě pro hodnotu parametru t_0 platí

$$k(t_0) = \frac{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3}.$$

Poznámka: Z uvedeného vzorce plyne, že v inflexním bodě křivky je křivost $k(t_0) = 0$.

Poznámka: Přímka má ve všech svých bodech nulovou křivost a na druhou stranu křivka, jejíž křivost je ve všech jejích bodech identicky rovna nule, je přímka.

Oskulační kružnice křivky

V okolí regulárního bodu A křivky k můžeme křivku k přibližně nahradit tzv. **oskulační kružnicí**. Oskulační kružnice je taková kružnice, která má v bodě A s křivkou k :

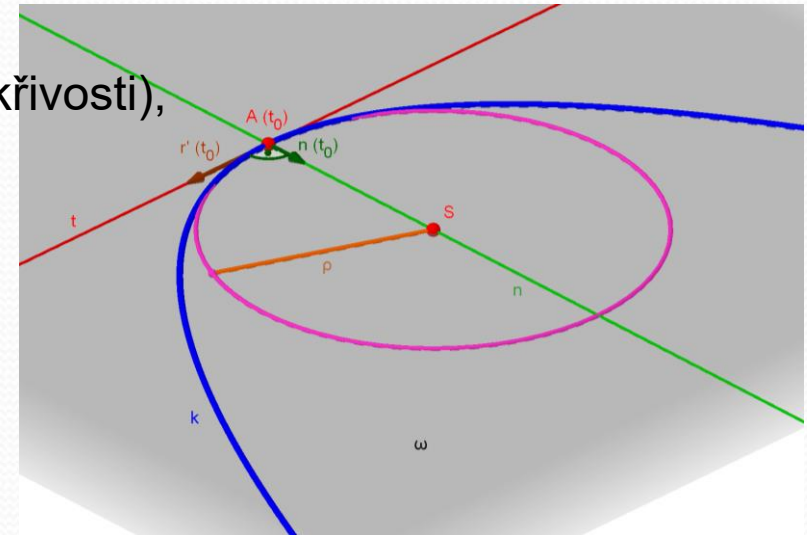
- a) společnou tečnu t ,
- b) stejnou křivost (resp. stejný poloměr křivosti),
- c) společnou hlavní normálu.

Pro střed S oskulační kružnice platí:

$$S = A(t_0) + \rho(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0),$$

kde

$$\mathbf{v}(t_0) = \frac{\mathbf{n}(t_0)}{\|\mathbf{n}(t_0)\|}$$



je jednotkový směrový vektor hlavní normály n v bodě $A(t_0)$.

Poznámka: Oskulační kružnice leží zřejmě v oskulační rovině křivky.

Poznámka: Z konstruktivního hlediska mají oskulační kružnice využití převážně rovinných křivek. Vzhledem ke skutečnosti, že rovinná křivka leží ve své oskulační rovině, je hlavní normálou n křivky k v bodě A kolmice na její tečnu v bodě A . Pak mluvíme o tzv. **normále rovinné křivky**.

Příklad 3.7:

Napište implicitní rovnici oskulační kružnice křivky $k: y = 4x - x^2$ v bodě $x_0 = 1$.

Danou křivkou je parabola. Zapišeme ji parametrickými rovnicemi, z nichž vytvoříme vektorovou funkci dané paraboly, tj.

$$x = t, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$y = 4t - t^2$$

$$z = 0$$

$$\mathbf{r}(t) = (t, 4t - t^2, 0) \Rightarrow \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(1) = (1, 3, 0)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 4 - 2t, 0) \Rightarrow \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'(1) = (1, 2, 0)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (0, -2, 0)$$

$$\mathbf{b}(1) = \mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2)$$

$$|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$|\mathbf{r}'(1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)|}{|\mathbf{r}'(1)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \times \mathbf{r}'(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, -2, 0)$$

$$\mathbf{v}(1) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{2\sqrt{5}}, 0 \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

$$n: X = (1, 3, 0) + \lambda (5, -2.5, 0)$$

$$S_1 = (-4, 5.5, 0)$$

$$z = 0$$

$$S\left[6, \frac{1}{2}, 0\right]$$

$$\underline{\underline{(x-6)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{125}{4}}}$$

