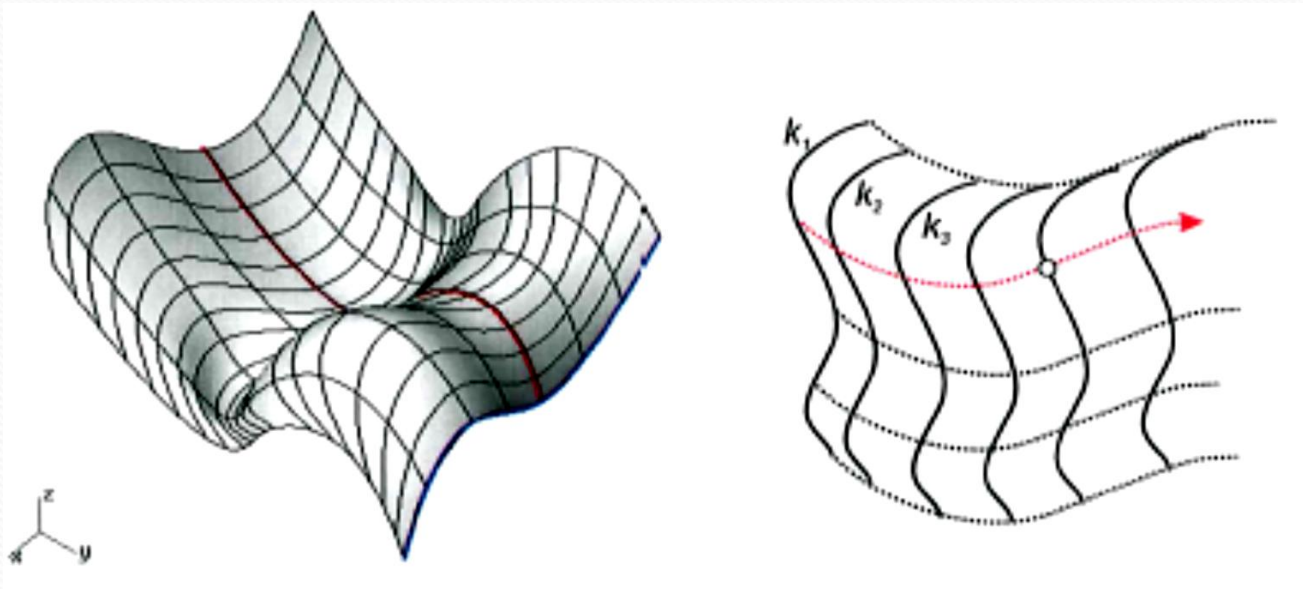


PLOCHY

Plocha je

- jednoparametrická soustava křivek (plocha vzniká pohybem křivky, která není dráhou pohybu - křivka se může během pohybu měnit)
- dvouparametrická soustava bodů (poloha bodu na křivce je určena také jedním parametrem)



Klasifikace ploch

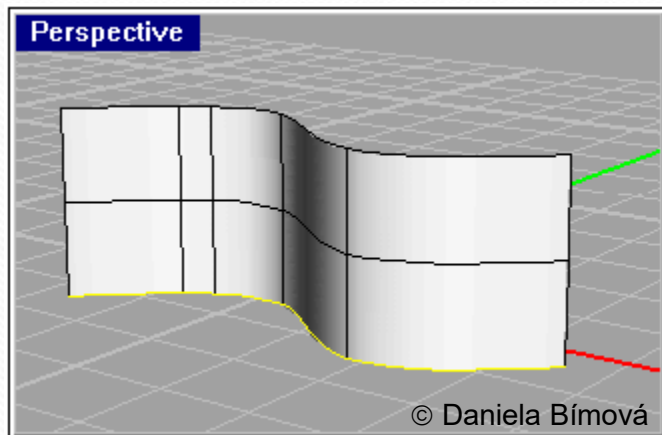
Plocha vzniká pohybem křivky, proto nás zajímají dva způsoby klasifikace ploch: podle druhu pohybu a podle tvořící křivky. V následujících dvou tabulkách jsme plochy roztrídili podle těchto dvou hledisek.

a) podle druhu pohybu		
název plochy	pohyb	příklad plochy
translační	posunutí	válec, rovina
rotační	rotace	rotační válec, rotační kužel, rotační hyperboloid
šroubové	šroubový pohyb	cyklická šroubová plocha, vývrtková šroubová plocha

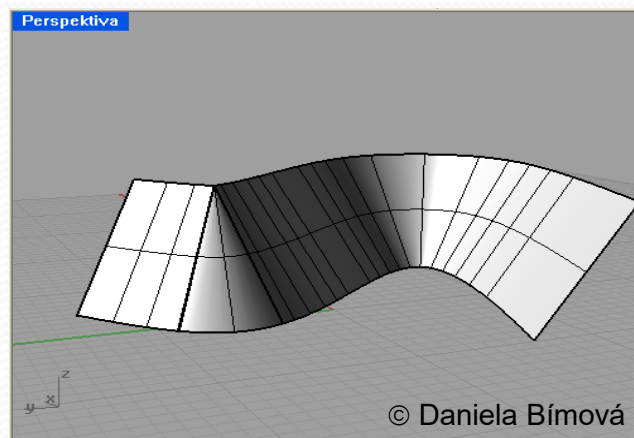
b) podle tvořící křivky		
název plochy	křivka	příklad plochy
přímkové	přímka	kuželová plocha, hyperbolický paraboloid, přímkové šroubové plochy
cyklické	kružnice	válec, Archimédova serpentina
kvadriky	kuželosečky	elipsoid, paraboloid, hyperboloid

Translační plochy

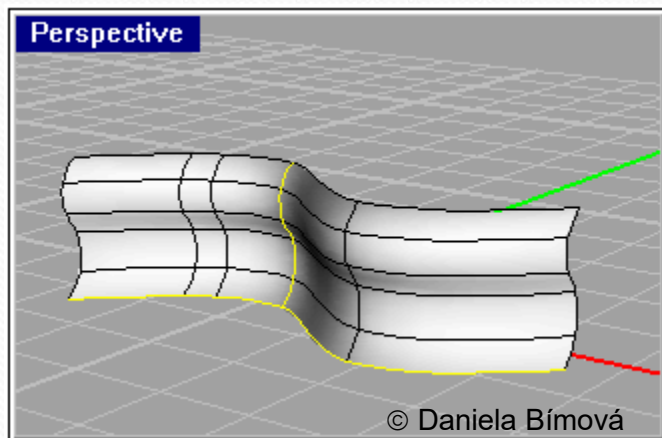
Translační plocha vzniklá vytažením tvořící křivky přímo



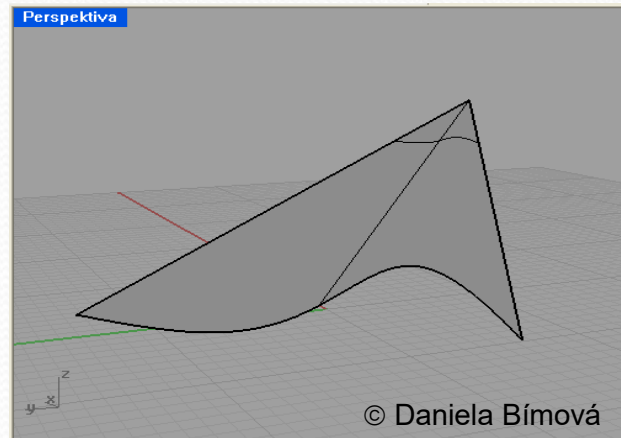
Translační plocha vzniklá vytažením tvořící křivky s úkošem



Translační plocha vzniklá vytažením tvořící křivky podél křivky

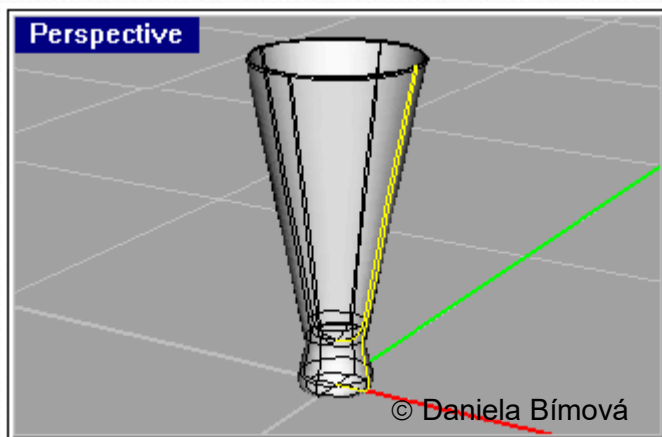


Translační plocha vzniklá vytažením tvořící křivky do bodu

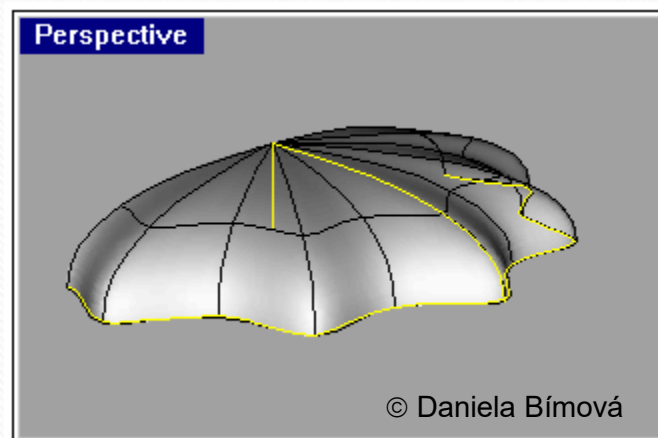


Rotační plochy

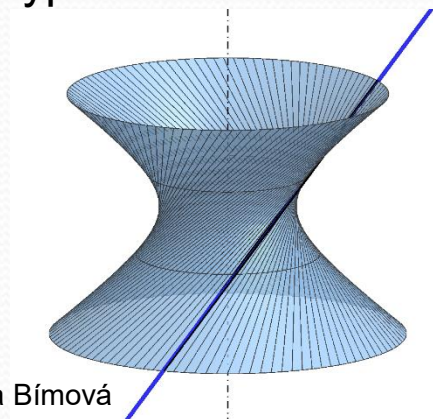
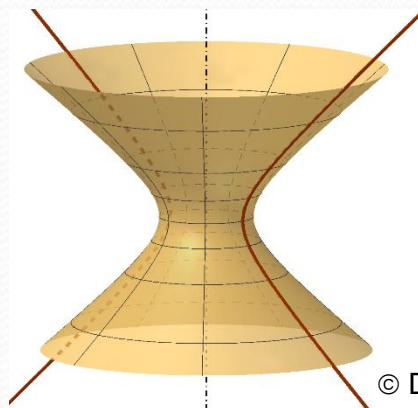
Rotační plocha vzniklá rotací tvořící křivky okolo osy



Rotační plocha vzniklá rotací tvořící křivky podél řídící křivky

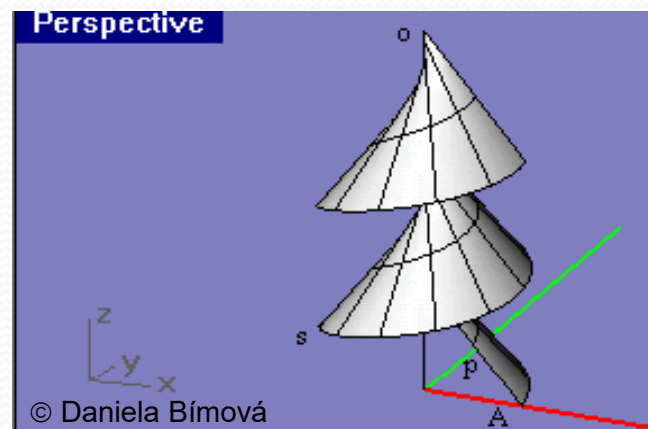
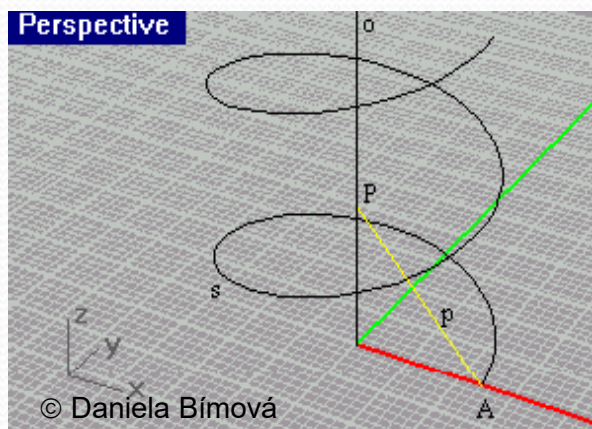


Jednodílný rotační hyperboloid

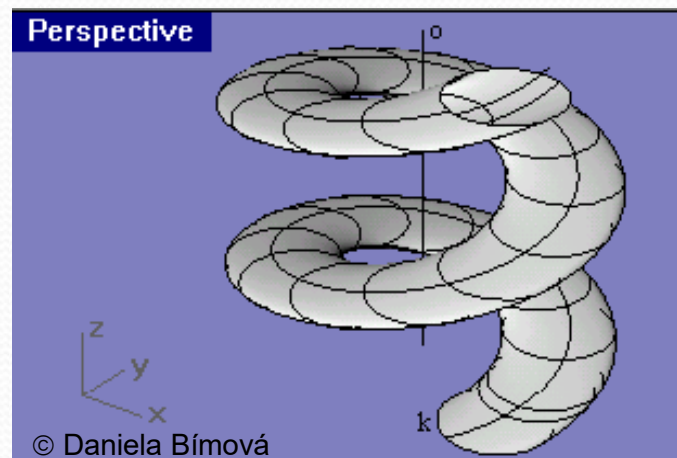
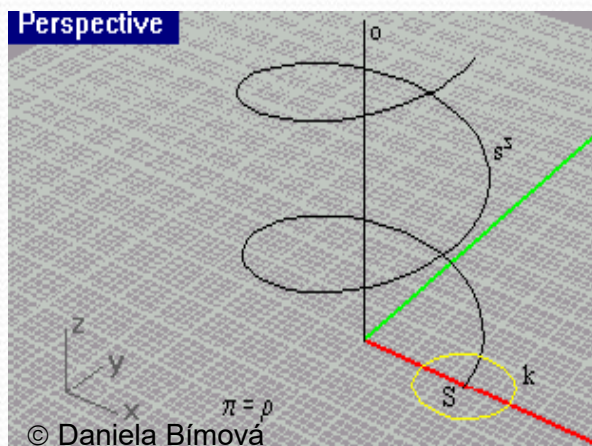


Šroubové plochy

Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha (vývrtková šroubová plocha)

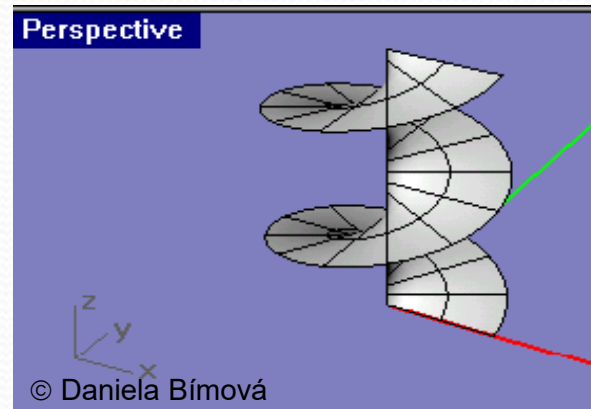
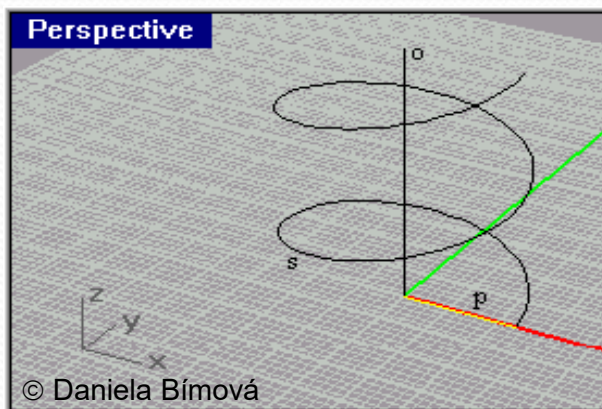


Normální cyklická šroubová plocha (vinutý sloupek)

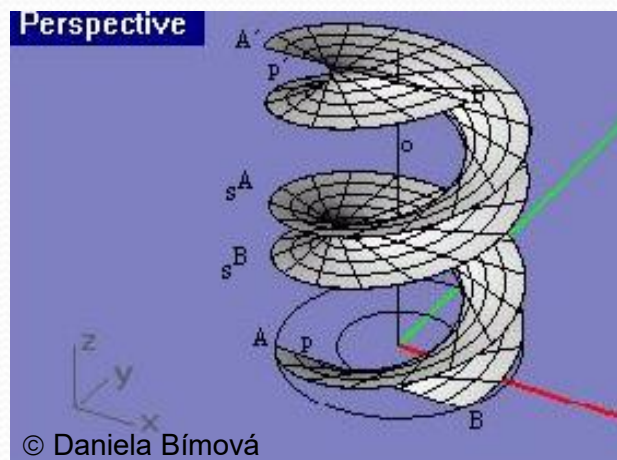
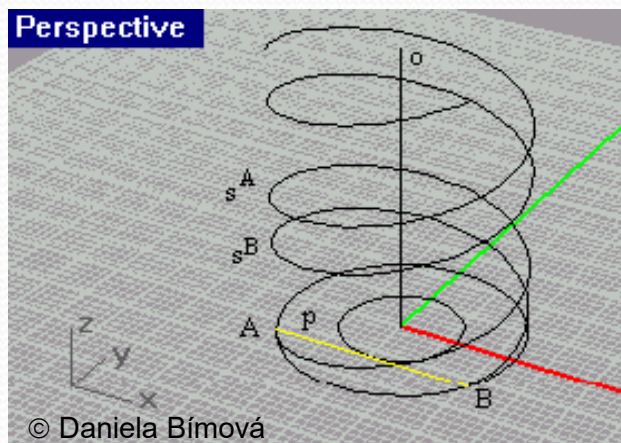


Přímkové plochy

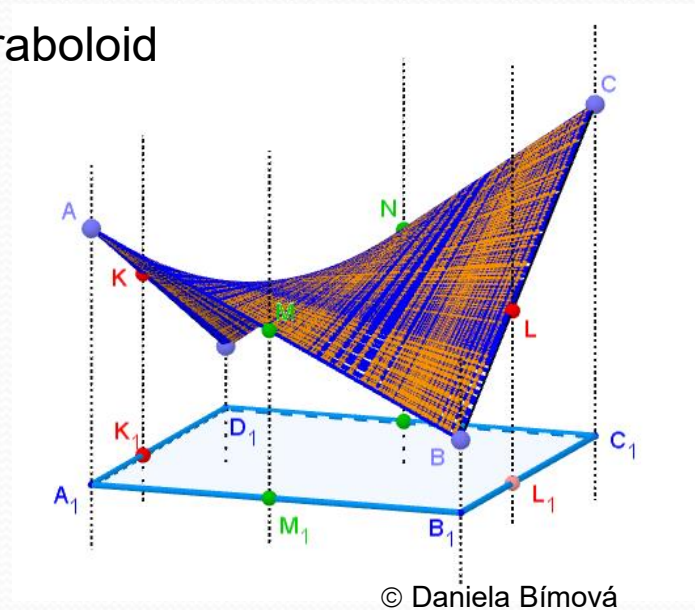
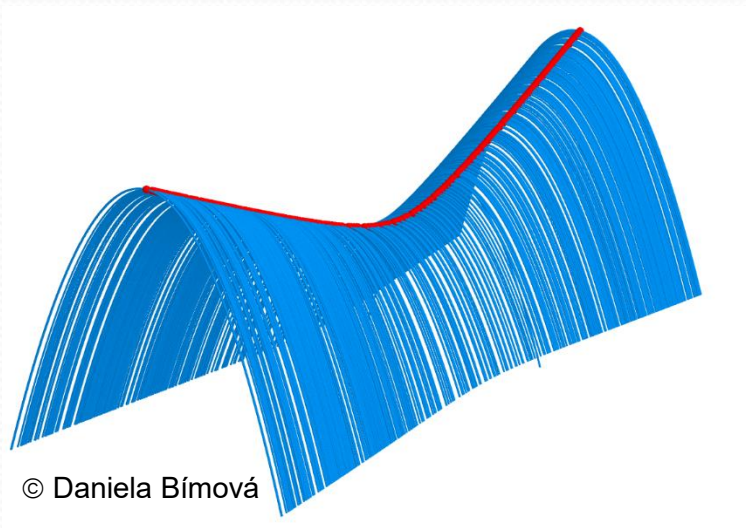
Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha



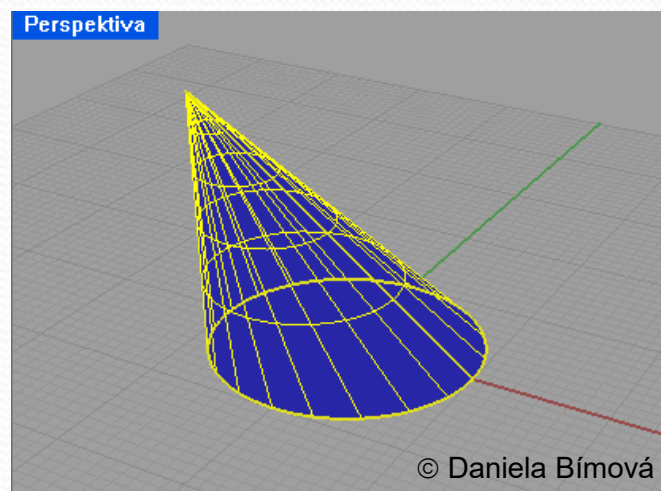
Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha



hyperbolický paraboloid

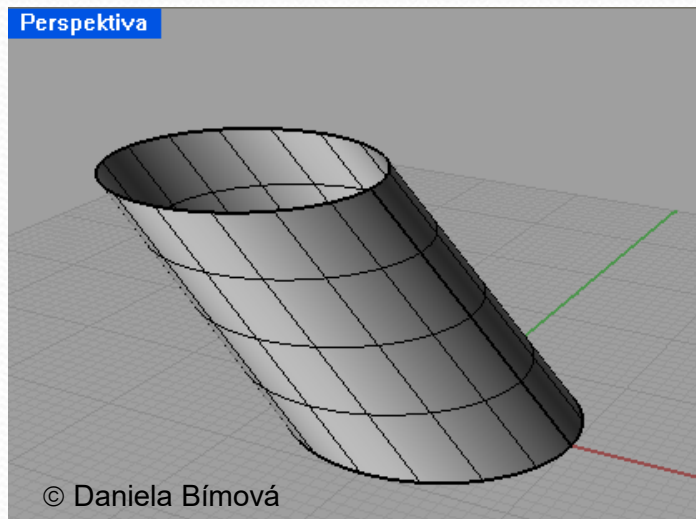


kuželová plocha

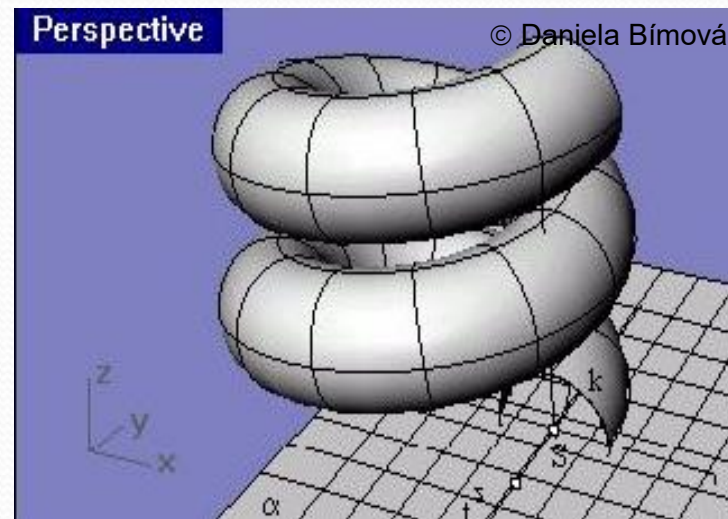


Cyklické plochy

Válcová plocha



Archimédova serpentina



Rovnice plochy

Parametrické vyjádření

Plochu můžeme zapsat parametricky, tj. ve tvaru

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), u \in I, v \in J$$

(např. parametrické vyjádření rotační válcové plochy je $x = 3 \cos u$, $y = 3 \sin u$, $z = v$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \mathbb{R}$), anebo pomocí vektorové funkce, tj. ve tvaru

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

dvou reálných proměnných u, v .

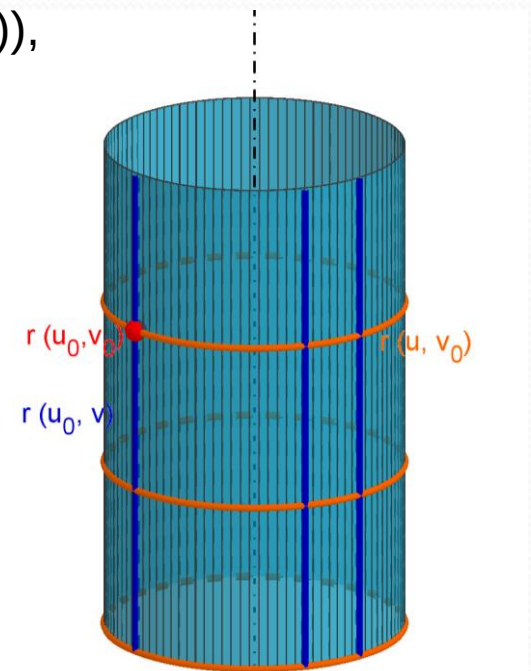
Je-li $u = \text{konst.}$, dostáváme z vektorové funkce plochy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{r}(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

tzv. **v -křivky** (pro uvedenou rotační válcovou plochu jsou v -křivkami přímky) a je-li $v = \text{konst.}$, dostáváme z vektorové funkce plochy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{r}(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)),$$

tzv. **u -křivky** (pro uvedenou rotační válcovou plochu jsou u -křivkami kružnice).



Poznámka: V každém bodě plochy se protínají právě jedna u -křivka s právě jednou v -křivkou. Říkáme, že bod plochy, kterým procházejí parametrické křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ a $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ má **křivočaré souřadnice** u_0, v_0 .

Explicitní tvar

Plochu můžeme zapsat explicitně, tj. ve tvaru

$$z = f(x, y)$$

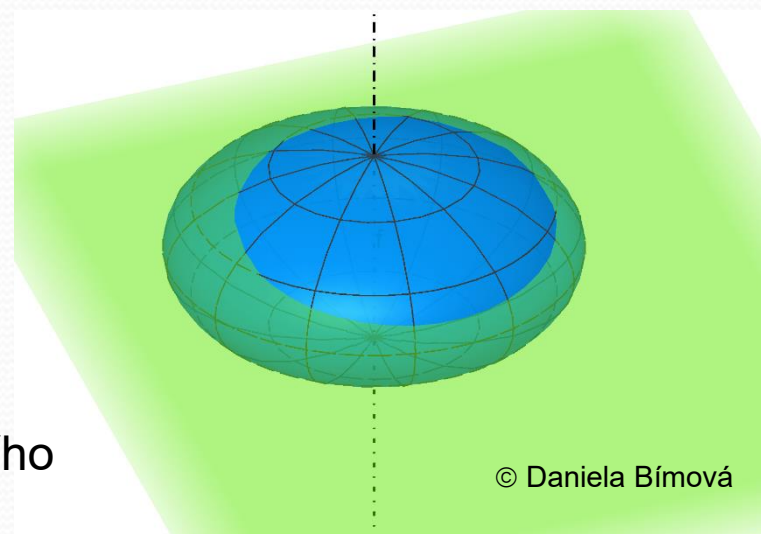
(např. $z = f(x, y) = 3x + 7y - 9$).

Implicitní vyjádření

Plochu můžeme zapsat implicitně, tj. ve tvaru

$$F(x, y, z) = 0$$

(např. $x^2/4 + y^2/4 + z^2 - 1 = 0$ – viz obr. rotačního zploštělého elipsoidu).



© Daniela Bímová

Poznámka: **Křivkou na ploše** rozumíme takovou křivku, jejíž body vyhovují rovnici plochy

Parametrizace ploch pomocí různých soustav souřadnic

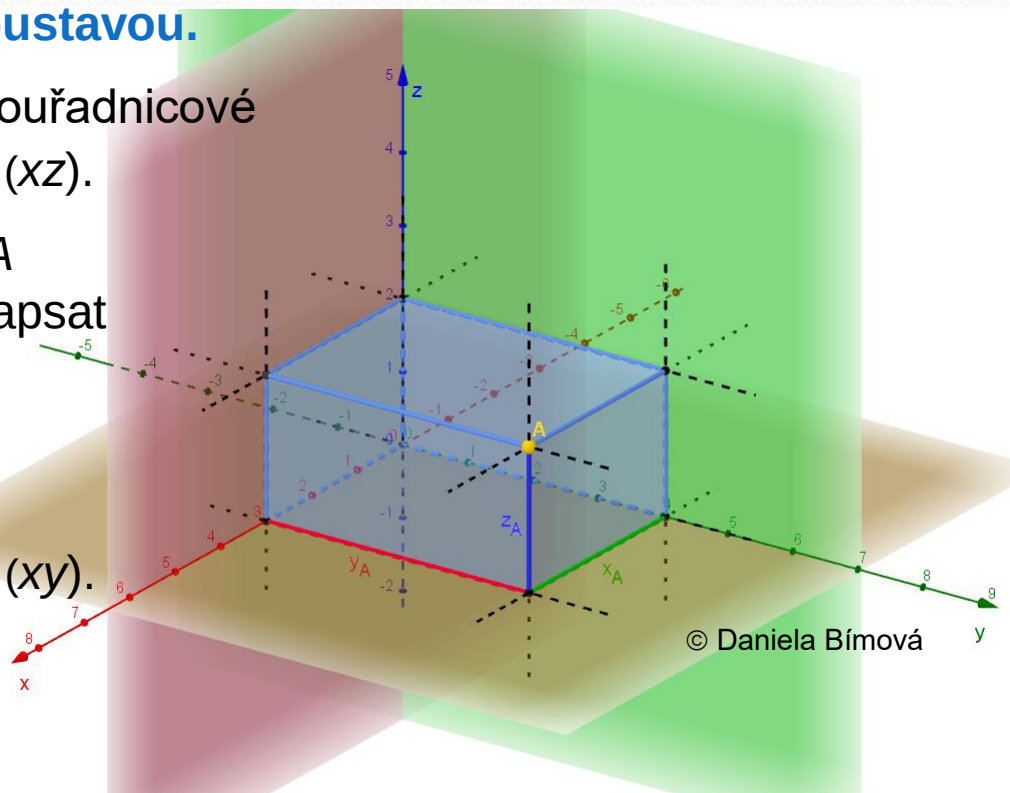
Pro různé účely (např. při výpočtech plošných integrálů, při výpočtech objemů těles, které jsou částmi trojrozměrného euklidovského prostoru omezenými různými typy ploch, pomocí dvojných či trojných integrálů apod.) lze plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru parametrizovat pomocí různých soustav souřadnic. Uvedme tři nejpoužívanější soustavy souřadnic, v nichž je možné plochy parametrizovat:

1. Kartézská soustava souřadnic
2. Sférická neboli kulová soustava souřadnic
3. Cylindrická neboli válcová soustava souřadnic

1. Kartézská soustava souřadnic

Kartézskou soustavou souřadnic v trojrozměrném euklidovském prostoru rozumíme takovou soustavu souřadnic, v níž jsou **souřadnicové osy** (obvykle označované x , y a z) navzájem kolmé přímky se společným průsečíkem, který nazýváme **počátek soustavy souřadnic**.

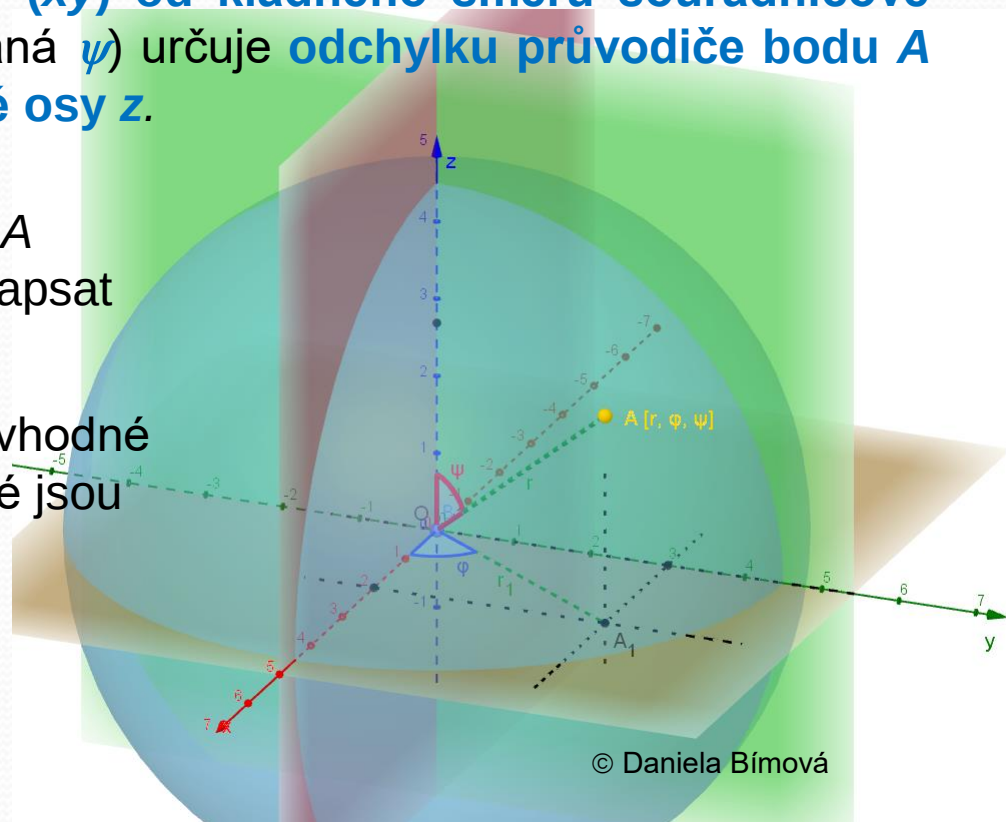
- Na souřadnicových osách zpravidla volíme shodné jednotky, v takovém případě nazýváme kartézskou soustavu souřadnic **ortonormální souřadnicovou soustavou**.
- Dvojice souřadnicových os tvoří souřadnicové roviny, tj. roviny (xy) , resp. (yz) a (xz) .
- Symbolicky lze souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic zapsat $A [x_A, y_A, z_A]$.
- Souřadnice x_A , y_A , z_A bodu A jsou vzdálenostmi bodu A po řadě od souřadnicových rovin (yz) , (xz) a (xy) .



2. Sférická (kulová) soustava souřadnic

Sférickou (kulovou) soustavou souřadnic nazýváme takovou soustavu souřadnic ve trojrozměrném euklidovském prostoru, v níž první souřadnice (označovaná r) bodu A trojrozměrného euklidovského prostoru udává **vzdálenost bodu od počátku soustavy souřadnic**, druhá souřadnice (označovaná φ) představuje **odchylku pravoúhlého průmětu průvodiče bodu A do souřadnicové roviny (xy) od kladného směru souřadnicové osy x** a třetí souřadnice (označovaná ψ) určuje **odchylku průvodiče bodu A od kladného směru souřadnicové osy z** .

- Symbolicky lze souřadnice bodu A ve sférické soustavě souřadnic zapsat $A [r, \varphi, \psi]$.
- Sférickou soustavu souřadnic je vhodné užít pro parametrizaci ploch, které jsou tzv. sféricky symetrické.



Transformace sférických souřadnic na kartézské souřadnice

Sférické souřadnice je možné transformovat na kartézské souřadnice pomocí rovnic

$$x = r \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \psi,$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\psi \in \langle 0, \pi \rangle$. Naopak kartézské souřadnice je možné transformovat na sférické souřadnice použitím rovnic

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

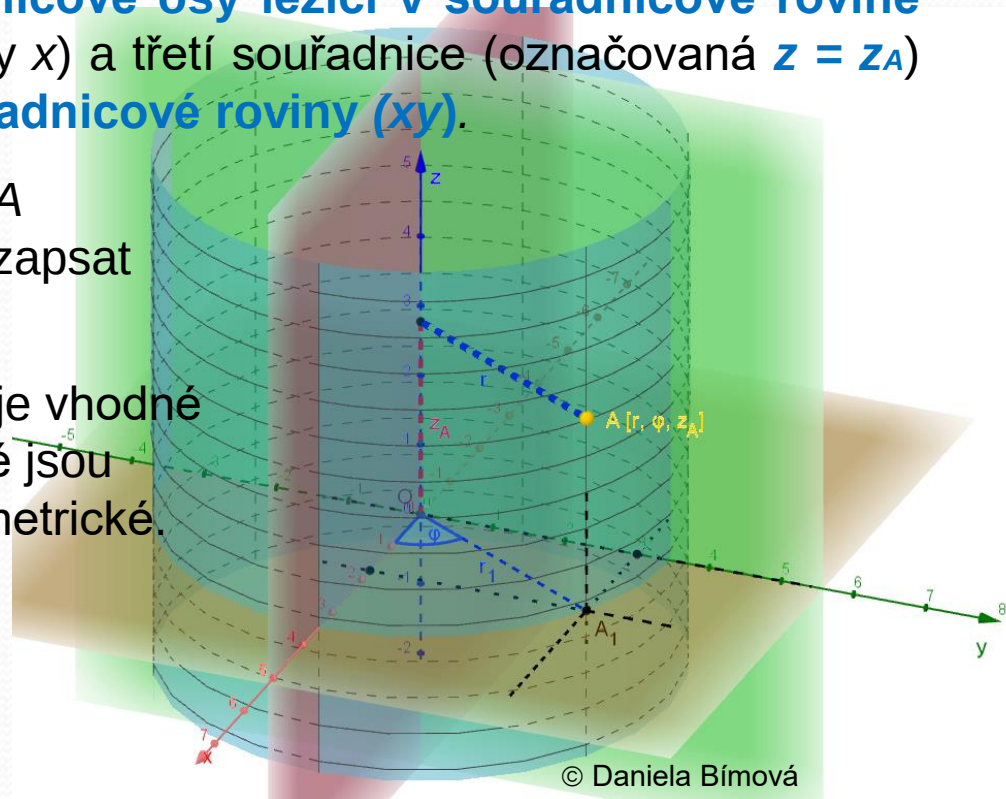
$$\psi = \arccos \frac{z}{r},$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\psi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

3. Cylindrická (válcová) soustava souřadnic

Cylindrickou (válcovou) soustavou souřadnic rozumíme soustavu souřadnic ve trojrozměrném euklidovském prostoru, v níž první souřadnice (označovaná r) určuje **vzdálenost bodu A** trojrozměrného euklidovského prostoru **od osy z** , druhá souřadnice (označovaná φ) představuje **odchylku pravoúhlého průmětu průvodiče bodu A do souřadnicové roviny (xy) od kladného směru zvolené souřadnicové osy ležící v souřadnicové rovině (xy)** (nejčastěji od souřadnicové osy x) a třetí souřadnice (označovaná $z = z_A$) určuje **vzdálenost bodu A od souřadnicové roviny (xy)**.

- Symbolicky lze souřadnice bodu A v cylindrické soustavě souřadnic zapsat $A [r, \varphi, z]$.
- Cylindrickou soustavu souřadnic je vhodné užít pro parametrizaci ploch, které jsou tzv. cylindricky neboli válcově symetrické.



Transformace cylindrických souřadnic na kartézské souřadnice

Cylindrické souřadnice lze transformovat na kartézské souřadnice pomocí rovnic

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$z = z_A,$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Naopak kartézské souřadnice je možné transformovat na cylindrické souřadnice s použitím rovnic

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$z = z_A,$$

kde $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Příklad 5.1:

Určete sférické a cylindrické souřadnice bodu A s kartézskými souřadnicemi $A [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2]$.

Řešení:

Transformace kartézských souřadnic bodu A $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1]$ na sférické souřadnice:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\psi = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$A [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1] \sim A [\sqrt{2}, 30^\circ, 45^\circ]$$

Transformace kartézských souřadnic bodu $A \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right]$ na cylindrické souřadnice:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$z = z_A = 1$$

$$A \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right] \sim A [1, 30^\circ, 1]$$

Příklad 5.2:

Napište rovnici plochy $z = 5 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, v cylindrických souřadnicích.

Řešení:

Transformační rovnice pro výpočet souřadnice r , tj. vzdálenosti bodu plochy od počátku souřadnicového systému je tvaru

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

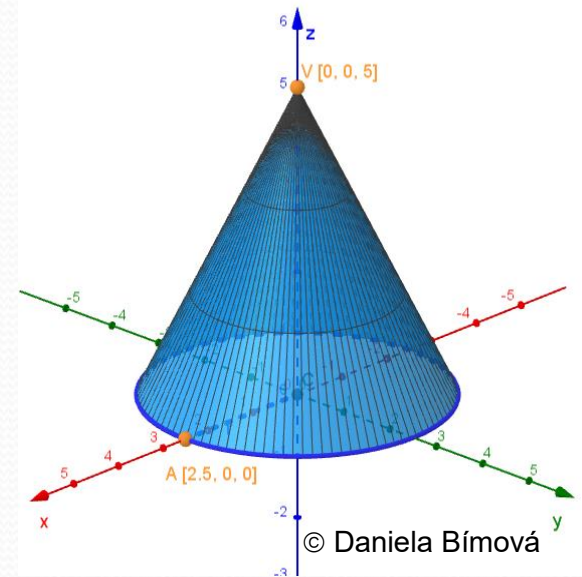
Je tedy možné danou explicitní rovnici plochy přepsat ve tvaru

$$z = 5 - 2r,$$

což je rovnice dané plochy ve válcových souřadnicích pro $z \in \langle 0, 5 \rangle$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Plochou popsanou uvedenými rovnicemi je část kuželové plochy, jejíž osou rotace je osa z , která je společná oběma souřadnicovým soustavám – kartézské i cylindrické souřadnicové soustavě.

Plocha je shora omezena vrcholem $V [0, 0, 5]$ a zdola kružnicí s poloměrem $r = \frac{5}{2}$ ležící v souřadnicové rovině (xy).



Tečna a tečná rovina plochy

Definice:

Tečná rovina plochy je množina tečen křivek plochy v daném bodě.

Poznámka: Tečná rovina v regulárním bodě plochy je určena libovolnou dvojicí různoběžek, které prochází daným bodem a které se plochy dotýkají.

Definice:

Tečna plochy je přímka tečné roviny, která prochází dotykovým bodem.

Poznámka: Tečnou rovinu τ v bodě (u_0, v_0) určují $\mathbf{r}'(u)$ u -křivky a $\mathbf{r}'(v)$ v -křivky, platí-li

$$\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}'(v) \neq \mathbf{0}.$$

Pak je tečná rovina τ vyjádřena vztahem

$$\tau: [\mathbf{MX}, \mathbf{r}'(u), \mathbf{r}'(v)] = 0.$$

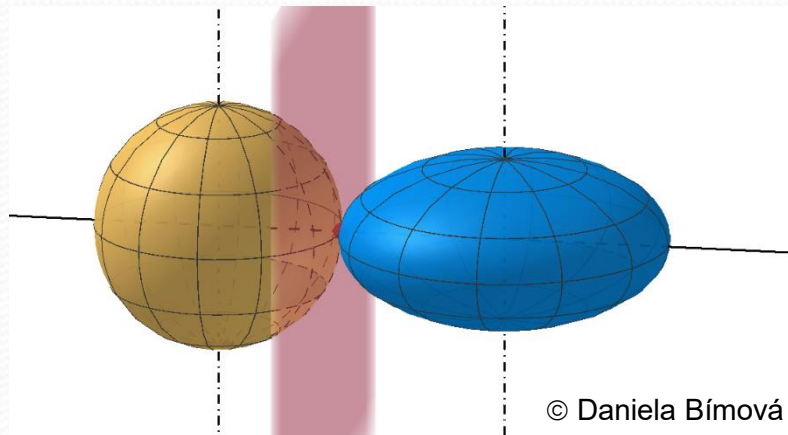
Definice:

Normála plochy je kolmice k tečné rovině plochy v bodě dotyku.

Dvě plochy

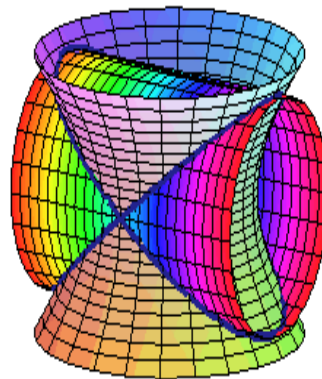
Definice:

Dvě plochy se **dotýkají** v daném bodě, jestliže v něm mají společnou tečnou rovinu.



Definice:

Průniková křivka je množina společných bodů dvou ploch.



Klasifikace bodů na ploše

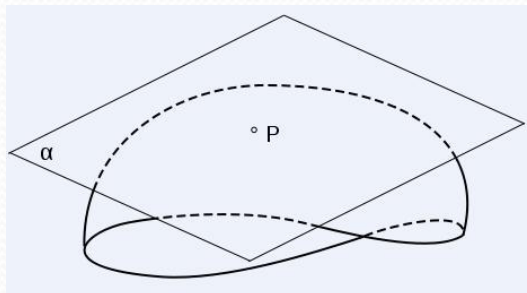
Definice:

Bod na ploše je **regulární**, jestliže v něm existuje právě jedna tečná rovina a **singulární** v ostatních případech.

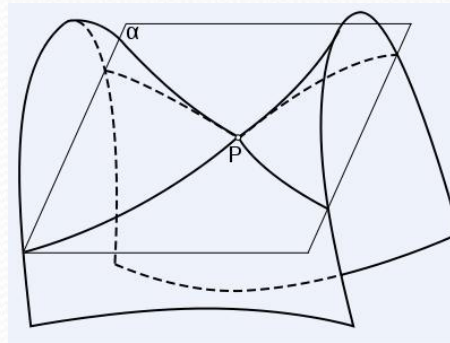
Klasifikace bodů na ploše podle hodnot tzv. hlavních křivostí:

- 1) *eliptický bod* (hlavní křivosti mají stejné znaménko)
- 2) *hyperbolický bod* (hlavní křivosti mají opačné znaménko)
- 3) *parabolický bod* (jedna z hlavních křivostí je rovna nule, ale ne obě)
- 4) *planární bod* (křivosti jsou rovny nule, rovina)

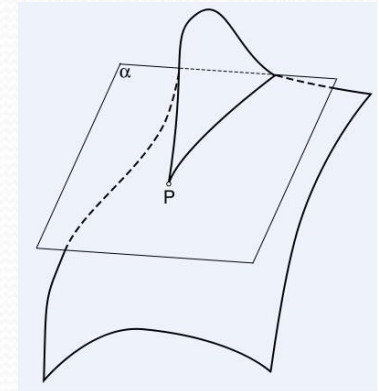
add 1)



add 2)



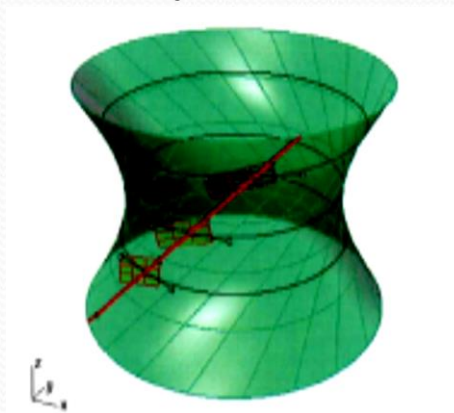
add 3)



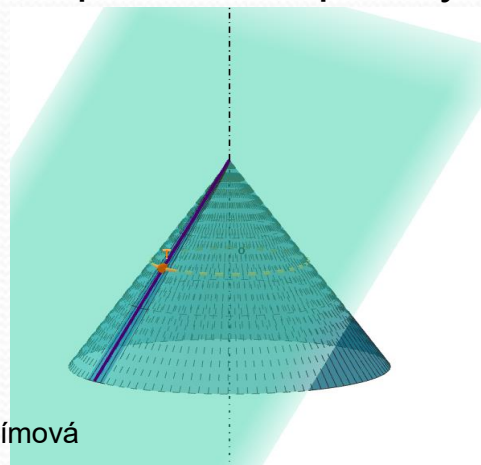
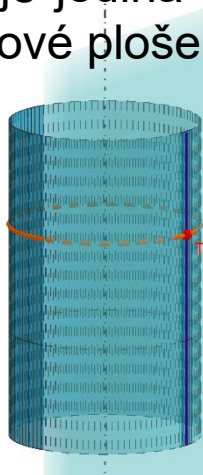
Klasifikace přímek na ploše

Přímky na ploše rozdělujeme na:

- **regulární**, kdy v každém bodě přímky existuje jiná tečná rovina - tečné roviny tvoří svazek rovin (např. přímky na rotačním jednodílném hyperboloidu)



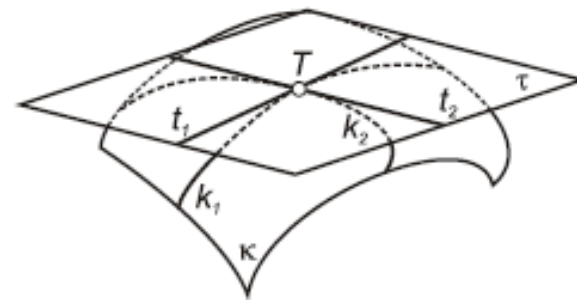
- **torzální**, kdy existuje jediná tečná rovina podél celé přímky (např. přímky na válcové či kuželové ploše).



Úlohy na plochách

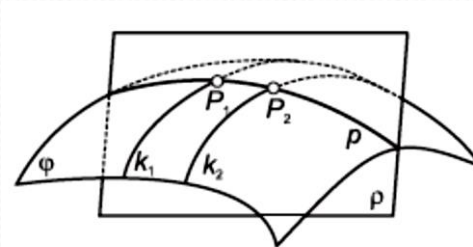
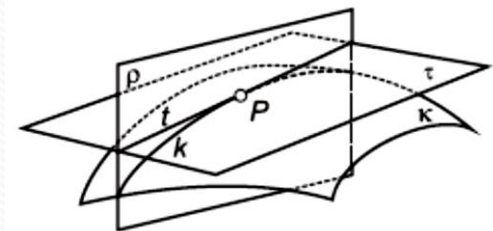
1. Tečná rovina τ v bodě T

- a) zvolíme dvě křivky k_1, k_2 na ploše procházející bodem T (vhodné jsou např. tvořící křivka a dráha pohybu),
- b) určíme tečny t_1 a t_2 k těmto křivkám (předpokládáme, že jsou různé),
- c) tečná rovina τ je určena tečnami t_1 a t_2 .



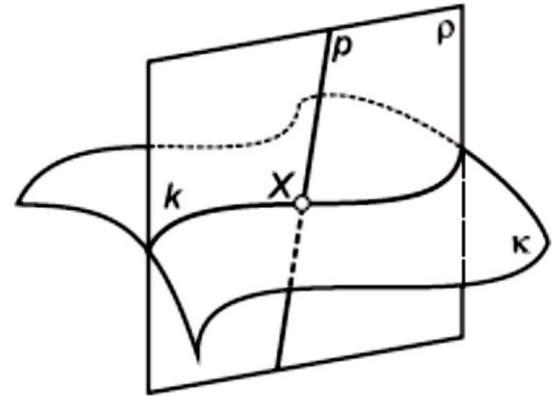
2. Řez plochy rovinou ρ a tečna řezu

- a) zvolíme křivku k plochy,
- b) průnikem křivky k s rovinou ρ je bod P (jeden bod řezu),
- c) opakováním bodu 1) a 2) dostáváme jednotlivé body řezu,
- d) tečna řezu je průsečnicí tečné roviny a roviny řezu ρ .



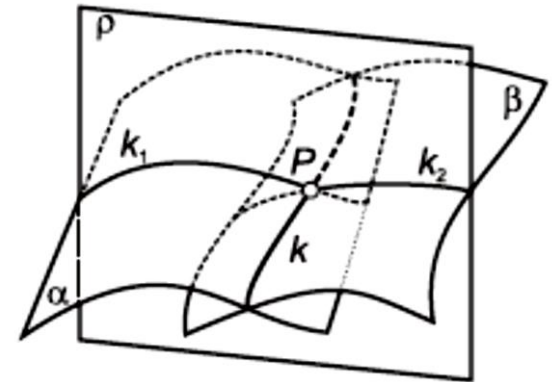
3. Průsečík přímky p s plochou κ :

- a) proložíme přímkou p rovinu ρ ,
- b) určíme řez plochy κ rovinou ρ , dostaneme průnikovou křivku k ,
- c) průnik přímky p a křivky k je hledaný průsečík X .



4. Průnik dvou ploch α a β

- a) zvolíme pomocnou rovinu ρ ,
- b) najdeme průnikovou křivku k_1 roviny ρ s plochou α ,
- c) najdeme průnikovou křivku k_2 roviny ρ s plochou β ,
- d) průsečík P křivek k_1 a k_2 je bodem průniku ploch α a β ,
- e) opakováním bodů a) - d) najdeme požadovaný počet bodů průniku ploch α a β ,
- f) tečna průnikové křivky v daném bodě je průsečnicí tečných rovin obou ploch v daném bodě (jiná možnost určení tečny průnikové křivky spočívá v konstrukci kolmice k rovině dané normálami daných ploch v daném bodě).



Průměty plochy

Průmět plochy směrem promítání do průmětny je tvořen průměty všech bodů plochy. **Skutečný obrys** plochy tvoří body plochy, v nichž jsou promítací přímky tečnami plochy. **Zdánlivý obrys** plochy je průmět skutečného obrysu plochy.

V Mongeově promítání tedy rozeznáváme obrys plochy vzhledem k půdorysně (**půdorysný obrys plochy**) a obrys vzhledem k nárysně (**nárysný obrys plochy**).